1

INTRODUÇÃO À MODELAGEM MATEMÁTICA AMBIENTAL

O florescer - Ipê-rosa no Pantanal Matogrossense
Mato Grosso do Sul - Brasil

1.1 A Modelagem Matemática Ambiental

A modelagem matemática de um problema real consiste essencialmente no trabalho de escrevê-lo numa linguagem matemática e, posteriormente, resolvê-lo interpretando sua solução numa linguagem compatível com a do mundo real.[1] É uma ferramenta de fundamental importância para entender e analisar a natureza de sistemas complexos reais.

A abordagem de um fenômeno ambiental real passa pelo processo de entendimento e pela definição da forma mais precisa possível com a escolha das informações necessárias. A transposição deste fenômeno para um problema numa linguagem matemática adequada contribui para a compreensão, o equacionamento, a simulação e a resolução dele.

É muito importante compreender quais aspectos de um problema são mais relevantes para serem considerados num modelo matemático, bem como saber as suas limitações decorrentes das simplificações, já que alguns aspectos serão omitidos durante o processo de modelagem.

Podemos considerar um modelo matemático adequado e eficiente quando ele for capaz de produzir soluções geradas em tempos computacionais aceitáveis e suficientemente próximas de valores reais para situações conhecidas ou estimadas.

Considere uma população de bactérias, por exemplo, quando submetidas a algumas condições ambientais, (como temperatura, umidade, alimento etc.), de modo que seu tamanho seja medido em determinados momentos e analisado. Ao estabelecer um modelo matemático envolvendo alguns parâmetros essenciais, e se os valores reais observados coincidirem ou se aproximarem dos valores obtidos pelo modelo, dizemos que o modelo representa bem o problema e poderá ser útil na previsão da evolução da população de bactérias.

Se na resolução de um problema real uma formulação matemática correspondente não conduzir a um resultado aceitável, ou se houver uma situação em que não se consegue obter uma solução compatível com a situação real do problema, devemos aperfeiçoá-lo, enriquecê-lo gradualmente se necessário, revendo e fazendo ajustes, como o incremento de hipóteses, parâmetros ou restrições adequadas, de modo a não invalidar ou mesmo abordando o problema com um novo modelo matemático, se preciso for.

---

[1] Barros e Bassanezi (2006).

Em Engenharia Ambiental, a modelagem matemática é uma ferramenta de grande interesse e cujo objetivo fundamental é explorar um problema, coletando dados, estipulando variáveis, parâmetros e estabelecendo hipóteses, impondo ou relaxando restrições para simular e prever eventos com interesses subjacentes e, a partir de alguns dados importantes, considerando principalmente os interesses da sociedade.

Neste texto exploramos algumas ideias de como podemos representar matematicamente problemas ambientais, sugerindo ferramentas para que possamos simular a evolução desses problemas partindo de alguns dados observacionais e hipóteses.

A poluição, ao alterar as características da água, do ar ou do solo, configura um problema ambiental e causa prejuízos à nossa sobrevivência e à sobrevivência das espécies animais e vegetais.

Quando a água, o ar ou o solo de uma região são agredidos com uma contaminação, por exemplo, por meio de vazamentos, fumaças, lixos, aterros, materiais radioativos, agrotóxicos etc., não só as espécies, mas os alimentos desta região também são contaminados, o que compromete a subsistência da população.

Problemas ambientais relativos à poluição estão sendo causados pelo aumento significativo da população humana e da industrialização, principalmente nas

grandes cidades, com o lançamento de efluentes diretamente nos rios que nos abastecem, uso indiscriminado de agrotóxicos no solo, transportes movidos a combustíveis fósseis etc.

Ultimamente, a poluição e o uso inadequado dos recursos hídricos continuam prejudicando a qualidade das nossas reservas de águas, tornando cada vez mais cara a sua exploração. De fato, alguns dos aquíferos se encontram em regiões profundas, impondo limites técnicos que impedem que toda água subterrânea seja retirada. O custo de extração torna o aproveitamento da água desses aquíferos impraticável, o que nos leva a concentrar os esforços em águas superficiais do planeta, exigindo da sociedade um comprometimento maior para preservá-las límpidas.

A quantidade (massa) de água na Terra é estimada em cerca de 0.136×10^{19} toneladas, entretanto cerca de 3% dessa massa é de água-doce, e desta quantidade uma pequena parte é superficial. A maior parte da água-doce está concentrada nas geleiras ou são águas subterrâneas, armazenadas em aquíferos. Neste último caso, o tempo de armazenamento varia de semanas a milhares de anos, dependendo das condições do aquífero considerado,[2] e apenas uma pequena quantidade dela, cerca de 1%, encontra-se nos rios.[3] Logo, o uso desse indispensável bem precisa ser consciente para que nenhuma das suas utilidades para a subsistência da vida no planeta seja prejudicada.

Embora a água esteja distribuída de modo irregular pelos cinco continentes terrestres, o Brasil ocupa uma posição razoável, detendo cerca de 12% de água potável da Terra.

As cidades metropolitanas exigem grande quantidade de água. Elas são abastecidas por cerca de 20% dos nossos rios, o que leva à necessidade de preservação, recuperação e manutenção das matas ciliares, na tentativa mantê-los livres da poluição.

Considerando o aumento das emissões de substâncias gasosas nocivas, o que vem gerando cada vez mais problemas atmosféricos um problema de grande impacto global é a emissão do clorofluorcarbono (CFC) e outros elementos que reagem com a camada de ozônio e a destroem.

O ar que respiramos está cada vez mais comprometido, principalmente nas grandes cidades, onde a concentração de gases e de partículas sólidas suspensas é notadamente nociva, como o monóxido de carbono emitido pela crescente frota de veículos movidos a combustíveis fósseis ou a emissão procedente das indústrias poluidoras, que tem sido muito maior nos últimos tempos.

Uma vez gerada a poluição, ela se propaga e continua circulando pelo mundo afora de uma forma ou de outra; mesmo quando se dispersa, o processo de despoluição natural é difícil e muitíssimo lento, principalmente se a quantidade de poluentes for muito grande. Além do ar, da água e do solo cada vez mais contaminados pelas diversas formas de poluição que influenciam na qualidade do ar que respiramos, da água que bebemos e dos alimentos que comemos, temos ainda o lixo eletrônico, que vem aumentando substancialmente nos últimos anos, inclusive o lixo espacial no ambiente aéreo que circunda o nosso planeta e o perigo de propagação das radiações atômicas e de vírus.

Portanto, é imprescindível abordar os problemas ambientais em todos os níveis, principalmente a partir dos recursos da modelagem matemática. Com ela poderemos entendê-los melhor e propor ou indicar soluções para amenizar as consequências da má utilização do nosso planeta.

---

[2] Wendelander (2003).

[3] Segundo dados da Agência Nacional de Águas e Saneamento Básico (ANA, 2018).

1.2 Descrição de modelos matemáticos

A busca contínua para desvendar e entender o mundo por meio de teorias e experimentos para melhorar a qualidade de vida no planeta é uma atividade natural do homem. Porém, independentemente da vontade e de cada ação que fizermos, o meio ambiente é dinâmico e continuará existindo e se transformando.

Deste modo, um recurso que pode contribuir para a busca da melhoria da qualidade de vida é a Modelagem Matemática, que pode ser entendida de várias maneiras, como a citada por Rodney Carlos Bassanezi.[4]

A modelagem matemática é uma reprodução idealizada de algumas ou de todas as características físicas de um processo natural em escala adequada representando-o numa linguagem ou forma de fácil acesso e uso, unindo teoria e prática na busca de respostas para diferentes estímulos visando compreender a realidade e, de meios para agir e transformá-la com a tomada de decisões acertadas.

Muitos problemas relativos ao ambiente em que vivemos podem ser modelados matematicamente, tais como os impactos do crescimento de uma população, da urbanização de uma bacia hidrográfica, da alteração do leito de um rio, da ocorrência de acontecimentos extremos, como lançamento de poluentes em rios, represas, lagoas ou ar etc. Essa modelagem pode ser feita para que medidas preventivas possam ser tomadas de modo a reduzir os impactos lesivos as populações local e mundial.

Simplificadamente, podemos afirmar que um modelo é uma representação do comportamento de um dado sistema complexo levando em consideração as mesmas características da realidade, ou seja, representando as variáveis essenciais do fenômeno e estabelecendo suas relações por meio de hipóteses ou baseadas em dados experimentais.

Os experimentos podem gerar um conjunto de dados adequado para mostrar as suas propriedades utilizando-se de tabelas e/ou gráficos, descrição esta conhecida como **modelo gráfico**. Muitas vezes os dados precisam ser interpolados ou ajustados para serem utilizados num modelo matemático contínuo, conforme veremos no capítulo 2.

Em geral, nos deparamos com três tipos principais de modelos: físicos, analógicos e matemáticos.

---

[4] Bassanezi (2002).

Modelo físico

Num **modelo físico** representamos um sistema real por um protótipo, numa escala muito menor, utilizando o conceito de semelhança para estabelecer o modelo.[5]

Modelo analógico

Um **modelo analógico** é baseado na analogia entre diferentes processos físicos. Utiliza-se a analogia das equações que regem diferentes fenômenos, para modelar o processo desejado num sistema mais conveniente e de custo reduzido. Uma analogia pode ser encontrada entre as equações do movimento livre e a Lei de Malthus do crescimento exponencial de uma população, conforme veremos nos capítulos 3 e 4, ou entre um modelo de movimento oscilatório do tipo massa-mola e o de um circuito elétrico do tipo RLC, que consiste de um resistor (R), um indutor (L) e um capacitor (C).

Modelo matemático

Num **modelo matemático** procuramos representar a natureza de um sistema através da formulação de uma função, ou de um conjunto de equações ou sistemas de equações matemáticas a partir de um conjunto de dados, hipóteses e/ou leis físicas.

Uma grande vantagem de um modelo matemático é a versatilidade como podemos modificar a sua lógica, incluindo ou retirando novos aspectos do problema real e fazendo diversas simulações para obtenção de resultados de diferentes situações de um mesmo problema ou de diferentes problemas, além de permitir a obtenção da resposta com mais rapidez e segurança ao empregar as ferramentas computacionais.

Durante o estudo de um problema ambiental, é importante que ele seja discutido por uma equipe multidisciplinar para que se possam levar em consideração os elementos essenciais vistos com uma abordagem ampla e diversificada do problema.

Inicialmente na fase de estudos de um problema devemos identificar algumas questões relevantes (de preferência com especialistas de várias áreas relacionadas), verificando se é realmente necessário a elaboração de um modelo matemático.

Caso afirmativo, devemos ter clareza sobre sobre as seguintes questões: Qual é o problema que deve ser modelado? Qual é o objetivo do modelo

[5] Conforme abordaremos na seção 3.3 do capítulo 3 para simulação da poluição numa represa com recipientes de água e um corante.

em questão? Quais processos são mais relevantes e quais devemos considerar? Quais são as variáveis do sistema? É possível obter alguns dados do problema? Quais são os parâmetros disponíveis e que dados são conhecidos? Quais são as relações entre os dados? Que respostas procuramos? E como podemos aferir o modelo? Os resultados podem ser verificados por meio de medições? O modelo pode ser validado? O modelo pode ser aplicado? Etc.

Após a tomada de decisão sobre a utilização de um modelo matemático, devemos considerar suas limitações, as vantagens que ele pode oferecer e as suas desvantagens.

Lembramos que um modelo é somente uma ferramenta e suas possíveis soluções devem servir como subsídios para indicar a tomada de decisões. As referidas decisões só podem ser tomadas quando existe a interpretação correta e a familiaridade com os conceitos e técnicas empregados, a validação do modelo e o conhecimento das reais limitações da modelagem realizada.

Devemos ter em mente, no entanto, que nenhum modelo é capaz de descrever exatamente os processos naturais por conta de diversos fatores como: a grande complexidade dele; o grande número de parâmetros; a falta de conhecimento ou a imprecisão de alguns deles; as hipóteses introduzidas e as simplificações convenientes ou as generalizações introduzidas etc.

A resposta de um modelo depende principalmente das hipóteses, das simplificações e da exatidão dos parâmetros usados que contribuíram para a sua resolução.

Às vezes, somos levados a dividir um problema grande e complexo gerado pelo modelo em vários problemas menores e mais simples, e a partir dos mais simples resolver o mais complexo.[6]

Num problema físico geralmente fazemos algumas suposições para definir as questões mais relevantes e estipular as hipóteses sobre o sistema natural abordado. Na modelagem matemática geralmente simplificamos devidamente a descrição de um processo físico, transformando em problemas regidos por relações matemáticas, considerando as leis de balanço, como a conservação de massa, de energia etc., com as condições iniciais e a descrição de condições de contorno do problema.

Sempre que possível resolvemos analiticamente o problema em questão. No entanto, na maioria das vezes nem sempre é possível encontrar uma solução analítica, o que nos leva a considerar métodos numéricos apropriados.

No tratamento numérico, buscamos aproximações da solução, por exem-

---

[6] Polya (1997).

plo, a descrição aproximada de uma equação diferencial por uma formulação algébrica de equações de diferenças etc. e o cálculo das variáveis em pontos discretos do domínio considerado.

Para obter os resultados desejados na resolução de problemas podem ser necessários diferentes conceitos e técnicas matemáticas como aquelas básicas, que envolvem matrizes, sistemas lineares etc. bem como suas propriedades.

Outra consideração importante é que os parâmetros físicos obtidos da pesquisa ou literatura não são números absolutos, podendo pertencer a um intervalo de valores reais com incertezas, o que exige a calibração e o ajuste com base em uma série de dados ou mesmo a utilização da teoria Fuzzy,[7] que tem sido difundida ultimamente.

A interpretação dos resultados obtidos é uma fase final de grande importância da modelagem que implica os conhecimentos físicos específicos das grandezas calculadas e a comparação dos resultados numéricos com valores medidos e/ou esperados.

A validação de um modelo é feita considerando uma série de parâmetros e medidas, de preferência por um certo período em condições variadas. Se a solução obtida não for a desejável, realmente devemos retornar ao problema inicial e reelaborar o modelo matemático ou iniciar um novo modelo mais realista. A alteração do problema considerando novas necessidades ou o aumento da precisão exigida pode levar inclusive à mudança do modelo; embora o objeto concreto de estudo permaneça o mesmo, sua representação matemática pode ser mudada.

O resultado de um modelo matemático ambiental nos dá um prognóstico que pode nos indicar uma direção para a tomada de decisões convenientes, visando à melhoria da qualidade de vida da população.

A adequação de um modelo matemático ambiental responde a determinadas perguntas, como as que abordam:

- os impactos do crescimento populacional de um assentamento, de uma cidade etc.;
- o impacto da devastação de uma floresta numa região;
- o desmatamento ou construções ao redor de uma nascente ou das margens de um rio;
- os transtornos causados pela poluição do ar, rios, represas, lagoas etc.;

[7] Jafelice, Barros e Bassanezi (2005).

- as consequências da extração indiscriminada de determinados recursos naturais;
- as consequências da contaminação do ar, solo ou lençol freático;
- o impacto devido à perfuração de um poço no lençol freático de uma região;
- o impacto do vazamento de substâncias tóxicas, combustível ou petróleo no solo, rio ou mar;
- o impacto de chuvas torrenciais, inundações, alagamentos, deslizamentos e erosão, especialmente numa cidade;
- métodos e processos biológicos para remediação de solos e aquíferos contaminados;
- o impacto de construções civis, como casas, bairros, edifícios, indústrias, usina atômica, hidrelétrica etc. numa região;
- o impacto da pesca ou caça predatória etc.

1.3 Classificação de modelos matemáticos

Conforme o tópico da matemática utilizada, podemos classificar modelos matemáticos em:

- **Determinístico -** quando considera que as informações de entrada, condições iniciais num determinado instante, são bem-determinadas e suficientes para obter a solução, ou seja, para prever o futuro;[8]
- **Estocástico -** quando utiliza fatores aleatórios para descrever a dinâmica de um sistema;

Com relação à dependência do tempo, um modelo pode ser:

- **Estático -** quando os valores das variáveis permanecem constante no tempo, de modo que a geometria espacial do sistema não depende diretamente do tempo. Veja por exemplo o modelo do Exemplo 1.1 adiante;

[8] Modelos deste tipo serão apresentados ao longo do livro.

- **Dinâmico -** quando as variáveis são dependentes do tempo, de modo que uma decisão anterior influencia em decisões posteriores.[9]

Considerando as características das equações que o representam, um modelo matemático também pode ser classificado em:

- **Linear -** quando é representado por funções, equações ou inequações lineares, sistemas de equações ou de inequações lineares;

- **Não linear -** quando é representado por funções, equações ou inequações não lineares;

  Lembremos que uma função real $f(x)$ definida num domínio D é linear neste domínio se $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ e $f(k\ x) = k\ f(x)$ para todos os valores de x, x_1, x_2 no seu domínio D, e k um valor constante. Nos capítulos 3, 4, 5 e 6 apresentamos vários modelos dinâmicos, lineares ou não lineares.

- **Discreto -** quando as variáveis envolvidas são discretas e resultam em equações de diferenças ou discretas, conforme apresenta capítulo 3 e tal como demonstram os problemas de otimização linear no capítulo 6;

- **Contínuo -** quando se interpolam ou ajustam os dados por funções contínuas ou quando as variáveis envolvidas são contínuas e resultam em equações diferenciais ordinárias ou parciais, conforme apresentam os capítulos 4 e 5;

De acordo com a dimensão espacial, os modelos podem ser classificados em:

- **Zero-dimensional -** quando, por exemplo, aparece nas reações químicas de Na (sódio) com Cl (cloro), que resultam no $NaCl$ (cloreto de sódio) do tipo

  $$Na^+ + Cl^- \quad \Rightarrow \quad NaCl$$

  em que os modelos não apresentam variáveis espaciais nem mesmo variável temporal a serem determinadas;

- **Unidimensional -** por exemplo, o caso da quantidade de poluentes $u = u(x,t)$ carregada por um rio estreito, representado pela equação diferencial parcial da difusão

  $$u_t = V u_{xx}$$

[9] Conforme exemplos dos capítulos 3, 4 e 5.

sendo: $u_t = \dfrac{\partial u}{\partial t}$ a variação da quantidade de poluentes $u(x,t)$ com o tempo $t \in \mathbb{R}^+$, V um parâmetro real representando a velocidade média das águas do rio e $u_{xx} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ a segunda derivada parcial da quantidade de poluentes $u(x,t)$ em relação a variável x, pertecente a um intervalo real, $x \in I = [a,b]$ contido em $\mathbb{R}$, a, b real com $a < b$, considerando uma única direção x de escoamento do rio, conforme abordaremos no capítulo 5.

Da mesma forma, podemos considerar a infiltração unidirecional de precipitação em meio poroso; a propagação de calor em um fio metálico ou numa barra homogênea devido a uma fonte de calor na extremidade etc., que são representadas por uma equação diferencial parcial unidimensional.

- **Bidimensional -** quando, por exemplo, aparece nos modelos simplificados de escoamento de um rio largo ou lagoa,

$$u_t = V\ (u_x + u_y)$$

com $t \in \mathbb{R}^+$, $(x,y) \in R \subset \mathbb{R}^2$, $u_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, a derivada parcial de $u = u(x,y,t)$ com relação à variável real x e $u_y = \dfrac{\partial u}{\partial y}$, a derivada parcial de $u(x,y,t)$ com relação à variável real y.

Neste caso, desprezamos a profundidade, componente vertical z, do mesmo e levamos em consideração só o escoamento dinâmico plano nas direções x e y.

- **Tridimensional -** quando, por exemplo, o modelo tridimensional do problema de Dirichlet, explicitado pela equação de Laplace

$$h_{xx} + h_{yy} + h_{zz} = 0$$

para $(x,y,z) \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$ descrevendo, por exemplo, o estado estacionário de um lençol freático em condições homogêneas e isotrópicas, com condições de fronteira, ou seja, conhecendo-se os valores de $h = h(x,y,z)$ na fronteira $\partial\Omega$ de uma região Ω.

Abordaremos alguns modelos matemáticos ambientais simples em uma ou duas dimensões nos capítulos 3, 4 e 5 para ilustrar como ferramentas matemáticas conhecidas podem ser utilizadas para fazer previsões e nos conduzir à tomada de decisões de grande importância para nossa sobrevivência na Terra.

Entretanto, modelos podem ser constantemente aperfeiçoados para que se tornem cada vez mais realistas, utilizando ferramentas conhecidas ou criando novas, quando necessário.

Muitos problemas ambientais preocupantes de nosso planeta têm sido abordados ultimamente, como o limite das agressões que estão provocando a acidificação dos oceanos, a interferência dos ciclos globais do nitrogênio e do fósforo, a carga de aerossóis atmosféricos, a poluição química, o uso inadequado de água potável e as alterações no uso do solo. Rockström *et al.*[10] citam como limites o ciclo do nitrogênio, que garante a sua circulação no ambiente físico e nos seres vivos, da perda da biodiversidade e das mudanças climáticas.

Mais do que qualquer modelo, podemos questionar qual é a nossa contribuição para preservar a sustentabilidade de nosso planeta e para que as futuras gerações possam desfrutar de uma vida saudável, evitando que as nossas atividades continuem causando mudanças ambientais catastróficas, que, se não forem drasticamente reduzidas ou interrompidas, em breve destruirão a vida aqui na Terra.[11]

1.4 Passivos ambientais

Como planejar um empreendimento que provoque o mínimo de poluição ou que evite danos ambientais? Como reparar os danos já causados ao ambiente por uma construção? Como compensá-los?

Sabemos que os órgãos públicos têm suas limitações e muitas dificuldades para fiscalizar, distinguir as irregularidades através das características e atribuir responsabilidades aos causadores dos prejuízos ambientais. Isso se deve a vários fatores, entre eles a insuficiência da quantidade de especialistas para evidenciar os danos, os entraves nos processos de registro e a ausência de modelos adequados. E quais são as contribuições da sociedade, das Organizações Não Governamentais (ONGs) ambientais e de outras como associações de moradores, grupos pequenos e iniciativas, mesmo que individuais.

O desenvolvimento de métodos de mensuração de danos ambientais é de grande importância para que se possam atribuir responsabilidades e também para a prevenção de acidentes que causam prejuízos ao nosso ambiente.

---

[10] Rockström *et al.* (2009).

[11] Carta da Terra - Ministério do Meio Ambiente. Disponível em: https://antigo.mma.gov.br/educacao-ambiental/politica-nacional-de-educacao-ambiental/documentos-referenciais/item/8071-carta-da-terra.html. Acesso em: 5 jan. 2021.

A palavra **passivo** geralmente aparece ligada a um conjunto de dívidas, encargos e obrigações de uma empresa. Assim como as dívidas, os financiamentos, o capital etc., que aparecem no balanço patrimonial das corporações, atualmente também consideram um cálculo estimado do passivo ambiental, inclusive as aplicações de recursos destinados às ações de recuperação ambiental, os investimentos nas tecnologias, visando contribuir com a redução ou eliminação da poluição gerada e com o incremento da logística reversa.

De modo geral, o passivo ambiental está relacionado à dívida ecológica contraída por toda a população terrestre, pois todos nós geramos poluição, seja direta ou indiretamente.

Desta forma, quem mais polui é o maior devedor no que diz respeito à responsabilidade social com os aspectos ambientais. O lixo urbano gerado por indivíduos e empresas é o responsável pelos maiores prejuízos ambientais e pela destruição da natureza.

Como conscientizar a comunidade para a redução, reutilização e reciclagem de materiais, a elaborar composteiras para redução do lixo? E como promover um trabalho educacional, que deve ser feito e intensificado nas escolas e repartições públicas ou privadas?

Nos últimos anos, muitas ONGs e alguns setores do Estado vêm defendendo com mais afinco a preservação da natureza, desempenhando um papel muitíssimo importante na proteção do meio ambiente e exigindo cada vez mais dos agentes poluidores, ou seja, fazendo-os se preocuparem com a contrapartida, inclusive através de compensações.

O passivo ambiental possui características bastante abrangentes. Dentre elas destacamos:

- os aspectos físicos que abordam diretamente os problemas ambientais;
- os aspectos administrativos relativos à observância das normas e leis ambientais e dos procedimentos e estudos técnicos efetivados pelas empresas.

Com relação aos aspectos administrativos, podem ser mencionadas atividades como: o registro e o cadastramento nos órgãos do governo; o cumprimento das legislações; a efetivação de estudos e relatórios de impacto ambiental das atividades exercidas; a conformidade das licenças ambientais; as pendências relacionadas a infrações, multas e penalidades; os acordos com vizinhanças ou comunidades; acordos comerciais como a certificação ambiental; pendência do Programa Básico Ambiental; resultados de auditorias ambientais; medidas de compensação e até indenização e outras mais que podem utilizar cálculos matemáticos para obtenção de resultados mais efetivos.

Com relação aos aspectos físicos, podemos abordar modelos matemáticos ambientais, poluição de rios, represas, lagoas e mares; indústrias contaminadoras; instalações desativadas ou depósitos remanescentes; equipamentos obsoletos, como os que contêm césio ou outros elementos radioativos; de recuperação de áreas degradadas, como as que sofreram erosão, deslizamentos, por conta de práticas de mineração; de reposição florestal; de recomposição de canteiros de obras; de restauração de bota-fora etc.

Podemos abordar modelos matemáticos relacionados com os aspectos físicos dos reassentamentos humanos efetuados ou não realizados, oriundos: de construções de usinas hidrelétricas; de resíduos industriais que contêm produtos químicos (como formol); de embalagens de agrotóxicos e produtos perigosos; de lodo galvânico; de efluentes industriais, como os originados de curtumes; também podem ser citados o transporte, a armazenagem e o tratamento adequado de resíduos hospitalares, baterias, pilhas e material eletrônico; pneus usados; lixo espacial; de despejos de efluentes provenientes da criação de animais como suínos e aves; de abatedouros de animais; o descarte adequado de produtos ou insumos industriais vencidos etc.

Através de modelos matemáticos também podem ser analisados os problemas relacionados com medicamentos humanos ou veterinários vencidos; as bacias de tratamento de efluentes abandonadas; móveis e utensílios descartados; materiais obsoletos; contaminação do solo e da água; as emissões atmosféricas; preservação de reservas ecológicas e outros, cujos aspectos físicos podem ser explorados matematicamente.

As pessoas e as pequenas, médias ou grandes empresas que contribuem ou contribuíram para degradação do ambiente devem ser responsabilizadas e se empenhar na recuperação do dano causado, como na compensação e na procura de meios alternativos para que possam continuar atuando sem causar problemas ambientais maiores.

Finalmente, como mencionado anteriormente, os modelos matemáticos ambientais podem ser úteis para a elaboração dos cálculos e para a simulação dos danos ambientais, bem como para estimar reparos ou direcionar tomadas de decisões dos órgãos competentes.

As ferramentas matemáticas básicas, como o cálculo de perímetros e áreas de figuras planas, volumes de regiões espaciais, relações, funções, teoremas clássicos, como o de Pitágoras, as leis dos senos e cossenos, as equações e inequações algébricas, exponenciais e trigonométricas, as planilhas eletrônicas etc., são de grande utilidade para abordar alguns problemas ambientais simples como o do Exemplo 1.1, a seguir, sobre a área de proteção permanente das regiões ao redor de nascentes.

Exemplo 1.1 Preservação de uma nascente

Sabemos que as matas ciliares são sistemas vegetais essenciais ao equilíbrio ambiental e, portanto, devem representar upelma preocupação central para o desenvolvimento sustentável de qualquer local. A preservação e a recuperação delas, aliadas às práticas de conservação e ao manejo apropriado do solo, garantem a proteção de um dos principais recursos naturais, a água, sem a qual não viveríamos.

Entre as principais funções das matas ciliares destacamos: o controle da erosão nas margens dos cursos d'água, evitando o assoreamento dos mananciais; a filtração dos possíveis resíduos de produtos químicos, como agrotóxicos e fertilizantes; o auxílio na proteção da fauna local.

Assim, pequenos rios, lagos ou reservatórios em zona urbana devem ter uma região marginal de $30\,m$ de cada lado do espelho d'água preservada com mata ciliar. Lagos ou reservatórios em zona rural com área menor do que de $20\,ha$, $50\,m$ ao redor do espelho d'água. Para uma área a partir de $20\,ha$, a região marginal a ser preservada deve ser de $100\,m$ ao redor do espelho d'água. Os grandes rios e as represas de hidrelétricas devem ter uma região de $500\ m$ de mata ciliar ao redor do espelho d'água.

A relação entre a largura de um curso d'água e a correspondente largura da mata ciliar para cada margem que deve ser preservada é determinada pela Lei 12.651/2012, que dispõe sobre a proteção da vegetação nativa (popularmente conhecida como Código Florestal), e que se encontra estabelecida na Tabela 1.1 a seguir.

Tabela 1.1 Curso d'água × margem a ser preservada.

Largura do curso d'água	Largura marginal a ser preservada (m)
0-10 m (metros)	30
10-50 m	50
50-200 m	100
200-600 m	200
$>$ 600 m	500
Lago na zona urbana	30
Lago na zona rural $<$ 20 ha (hectare)	50
Lago na zona rural $>$ 20 ha	100
Represas hidrelétricas	500

As nascentes e olhos-d'água devem ser protegidas num raio de 50 m.

Digamos que uma região ao redor de uma nascente N foi desmatada e invadida na direção radial até o limite de uma secante $\overline{AB}$ de 20 m adentro da região circular que deveria ser protegida, conforme representada na Figura 1.1.

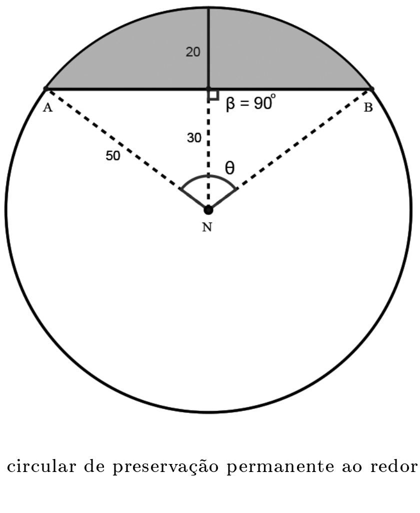

Figura 1.1 Área circular de preservação permanente ao redor de uma nascente.

Como obter a área da região invadida?

Considerando que as nascentes e olhos-d'água devem ser protegidos num raio $R = 50\,m$, ilustramos geometricamente o problema. De fato, para auxiliar no entendimento, consideremos que a Figura 1.1 representa a região circular envolvida, que deveria ser protegida com a nascente N no centro, a área invadida na direção radial de $20\,m$ limitada pelo arco de circunferência $\widehat{AB}$ e pela corda $\overline{AB}$.

Assim, a área que deveria ser preservada na região circular de raio $R = 50\,m$ ao redor da nascente deve ser igual a $A_p = \pi R^2 = \pi \times 50^2 \approx 7854\,m^2$.

A região invadida é uma parte do setor circular subentendendo um ângulo central θ. A área deste setor é dada por:

$$A_s = R^2 \times \frac{\theta}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

A parte da região deste setor circular subtendendo um ângulo central θ não invadida é igual à área do triângulo $\widehat{ABN}$, metade do produto da área da base pela altura do triângulo;

$$A_t = \frac{1}{2} \times 2 \times R \times sen(\frac{\theta}{2}) \times 30$$

cuja base é a secante $\overline{AB}$ de tamanho igual $2 \times R \times sen(\frac{\theta}{2})$ e altura $H = 30\,m$. Portanto, a área invadida é dada pela diferença da área do setor circular e a área do triângulo correspondente

$$A_i = R^2\ \frac{\theta}{2} - R\ sen(\frac{\theta}{2})\ 30$$

Logo, sendo invadidos $20\,m$ numa direção radial, a partir da corda $\overline{AB}$, restam $H = 30\,m$ na região central.

Pelo conhecido teorema de Pitágoras, que afirma que o quadrado da hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados dos catetos, temos que $50^2 = H^2 + L^2$, e a metade da medida L da base do triângulo é igual a 40 m. Então $sen(\frac{\theta}{2}) = \frac{40}{50} = 0.8$,[12] ou seja, $\theta = arcsen(0.8) = 1.854590436$ radianos.

Portanto, a área invadida obtida é dada por:

$$A_i = 50^2 \times \frac{1.85459}{2} - 50 \times 0.8 \times 30 \approx 1118\,m^2$$

[12] Adotaremos, a partir de agora, o ponto como separador decimal, conforme os softwares computacionais usados no capítulo 7 e também para não confundir com a vírgula separadora de coordenadas cartesianas.

que corresponde a mais de 14% da região que deveria ser preservada.

Com esta informação precisa, o órgão competente pela fiscalização poderia atribuir uma multa ao infrator e/ou exigir compensações do responsável pelo dano; e ainda, fazer o cálculo usando o mesmo raciocínio se a região invadida fosse maior ou menor radialmente.

Para a realização ou conferência dos cálculos aritméticos ou representações gráficas, sugerimos as ferramentas computacionais da seção 7.2 do capítulo 7.

1.5 Mapas conceituais

Sabemos que existem diversas formas de comunicar conceitos e ideias em ciências e que a comunicação verbal, escrita e pictórica por meio de mapas conceituais configura um poderoso elemento de expressão e de comunicação do conhecimento levando a várias reflexões e questionamentos.

Algumas destas formas de comunicação são mais simples e agradáveis para aprendermos a externalizar nossos pensamentos sobre o que estamos entendendo sobre um determinado tópico. As técnicas de mapeamento conceitual podem ser utilizadas como instrumento para apreender e registrar o pensar, representando as relações significativas entre conceitos na forma de proposição.

Assim, mapa conceitual é um instrumento esquemático para representar um conjunto de significados conceituais que estão imersos em uma estrutura de proposições. Completada uma etapa de aprendizagem ou tarefa de aprendizagem, os mapas conceituais fornecem um sumário esquemático do que está sendo aprendido, compreendido.

O mapa conceitual é um instrumento que pode ser utilizado no processo de pesquisa, ensino-aprendizagem e avaliação de modelagem matemática ambiental por meio de uma representação gráfica de um conjunto de significados conceituais, que pode vir acompanhada de um pequeno texto explicativo e inclusive de símbolos que ajudam organizar,[13] sistematizar, estudar e detectar as principais ideias do tópico abordado.

No mapa conceitual, colocamos o tema central e o que achamos mais importante sobre ele fazendo os *links* e orientações adequadas para os temas e com um simples olhar, possamos notar as conexões e interações temáticas tal como apresentado na Figura 1.2 a seguir.

Observamos que cada um pode elaborar o seu mapa conceitual, e alguns itens não podem faltar, tais como: ler o mundo; determinar e entender o pro-

[13] Salvador *et al.* (2003).

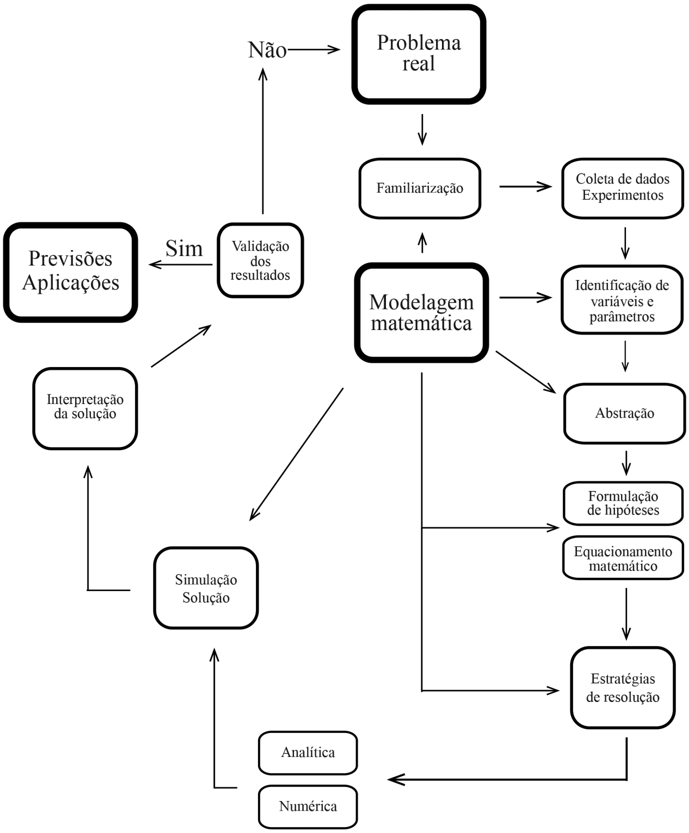

Figura 1.2 Mapa conceitual sobre modelagem matemática.

blema; fazer as hipóteses e simplificá-las; resolver o problema matemático obtido; validar as soluções matemáticas; definir a tomada de decisões baseando-se nos resultados, tal como apresentado no mapa conceitual.

Nos próximos capítulos abordaremos modelos matemáticos ambientais utilizando ferramentas matemáticas como taxa de variação, diferença finita, interpolação e ajuste de funções, derivadas, equações discretas, equações diferenciais ordinárias e equações diferenciais parciais, métodos analíticos e numéricos, problemas de otimização linear e ferramentas computacionais.

1.6 Problemas propostos 1

1. **Protegendo nascentes**

Verifique que podemos generalizar a área da região invadida da Figura 1.1 em função da altura $H \geq 0$ do triângulo suporte da região circular invadida por

$$A_i(H) = 50^2 \times \frac{\theta}{2} - H \times 50\, sen(\frac{\theta}{2}) = 50^2\, arcsen(\frac{\sqrt{R^2 - H^2}}{R}) - H\, \sqrt{R^2 - H^2}$$

Explicite o ângulo θ em função de H e faça uma tabela contendo os valores de $H \times A_i(H)$. Se a região invadida fosse $40\,m$ na direção radial, qual seria a sua área? E se a região invadida fosse x metros na direção radial? Como poderíamos sugerir a recuperação da área invadida? Quantas mudas de árvores nativas seriam necessárias para recuperar a região? Que tipo de punição ou compensação deveria ser imposta ao invasor? Se multado, como calcular o valor da multa a ser aplicada?

2. **Crescimento populacional de uma região**

A estimativa do crescimento populacional de uma região urbana e suburbana é de grande importância para várias áreas de engenharia. Supomos que a população da área urbana de uma cidade está decrescendo exponencialmente com o tempo de acordo com a função

$$P_u(t) = P_{u_M} e^{-k_u t} + P_{u_m}, \qquad t \geq 0$$

em que $P_u(t)$ é a população urbana no instante $t, t \geq 0$, P_{u_M} é a população urbana máxima, k_u é a taxa de decaimento da população urbana e P_{u_m} é a população urbana mínima. Além disso, supomos que a população suburbana está crescendo logisticamente de acordo com a função

$$P_s(t) = \frac{P_{s_M}}{1 + (\frac{P_{s_M}}{P_{s0}} - 1)e^{-k_s t}}$$

em que $P_s(t)$ é a população suburbana no instante $t, t \geq 0$, P_{s_M} é a população suburbana máxima, k_s é a taxa de crescimento da população suburbana, P_{s0} é a população suburbana inicial, em que tais parâmetros podem ser obtidos empiricamente. Assim, a população da cidade fica

$$P(t) = P_u(t) + P_s(t)$$

É possível que a população suburbana atinja 20% mais do que a urbana com os valores $k_u = 0.045$, $k_s = 0.08$, $P_{u_M} = 10000$, $P_{u_m} = 7500$, $P_{s0} = 15000$ para este modelo?

Calcule o tempo e o valor correspondente quando a região suburbana for 20% mais populosa do que a urbana se os valores dos parâmetros forem $k_u = 0.045$, $k_s = 0.08$, $P_{u_M} = 8500$, $P_{u_m} = 1000$ $P_{s0} = 5000$.

3. **População de um município**

   Considere a função população total $p(t)$ de um município num instante t, anos contados a partir de hoje, representada por $p(t) = 30000\ \left(\frac{3}{2}\right)^{c+\frac{t}{5}}$ habitantes, em que c é uma constante real. Sabendo que a população atual do município é $p(0) = 20000$ habitantes, qual deve ser o valor da constante c? Qual será a população daqui a três anos? E daqui a cinco anos?

   Sugestão: verifique se $c = -1$ e $p(3) \approx 25500$, $p(5) = 30000$ habitantes.

4. **Importância da água**

   Qual a população de sua cidade? Faça uma estimativa da quantidade de água captada diariamente (m^3/dia). Quantos litros são gastos diariamente por pessoa? E pela população total? Qual é a taxa de desperdício? Se uma torneira estiver gotejando a uma taxa de uma gota por segundo, qual será o volume de água em litros desperdiçado num dia? Numa semana? Num mês? Num ano?

5. **Energia**

   O crescimento exponencial é um caso de aumento de uma quantidade que pode ser aplicado em vários problemas ambientais - por exemplo, energéticos, econômicos, populacionais, exploração de recursos naturais etc.

   No final do século XX, o crescimento da geração de eletricidade no Brasil foi cerca de 4% ao ano. Sabendo-se que no ano 2000 foi de 349 terawatts-hora (1 TWh = 10^{12} Wh), se continuasse crescendo com esta mesma taxa, negligenciando as oscilações devido aos problemas, crises econômicas, pandemias, etc., quanto deveria atingir no ano de 2015? E em 2021? E em 2025?

6. **Energia solar**

   O Brasil é um país que possui dias ensolarados praticamente o ano todo. Explore como construir uma casa determinando a direção e inclinação adequadas do telhado para colocar placas solares, de modo a otimizar a captação da energia.

   Sugestão: explore a latitude local.

7. **Classificando um modelo**

   Pesquise e elabore um modelo ambiental e apresente uma discussão classificando o modelo, indicando a ferramenta matemática com a qual ele pode ser tratado. Você pode resolvê-lo analiticamente ou só numericamente? As equações ou inequações que o representam são consistentes? Ele é robusto, ou seja, as pequenas variações dos parâmetros levam a pequenas variações no comportamento do modelo? O modelo se aplica em um ou vários campos? Ele é simplificado ou ambicioso? Ele pode ser mais realista? Ele sugere novas ideias? Ele requer novos conceitos, novas técnicas? Ele requer observações ou experimentos? Você pode estimar os parâmetros envolvidos no modelo? Que aspectos da situação ele explica e o que ele não pode explicar? Quais são suas limitações? É possível elaborar outro modelo da mesma situação? É possível simplificá-lo? É possível generalizá-lo?

8. **Mapa conceitual sobre Modelagem Matemática Ambiental**

   Elabore um mapa conceitual sobre a modelagem matemática ambiental.

9. **Mapa conceitual dos principais problemas ambientais**

   Elabore um mapa conceitual sobre os principais problemas ambientais específicos da sua cidade, ou da sua região, do seu estado, país ou até mesmo do mundo.

Contribua com um sistema alimentar social e ambientalmente sustentável consumindo alimentos orgânicos in natura ou minimamente processados.