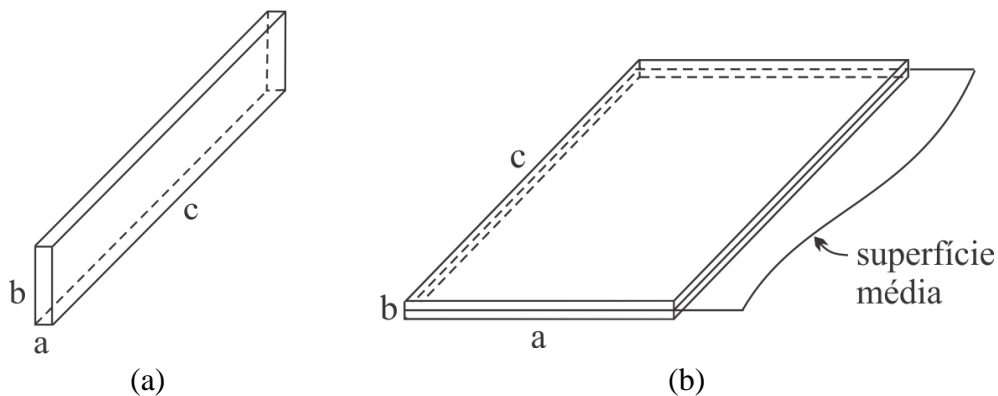


## 1. INTRODUÇÃO

Na Mecânica dos sólidos rígidos, as condições de equilíbrio e de movimento dos corpos são estabelecidas considerando a indeformabilidade deles, mas na realidade essa hipótese geralmente não se verifica e o corpo se deforma quando solicitado. A área da Mecânica que investiga o comportamento da estrutura, avaliando a sua capacidade de suportar as diferentes solicitações e deformações, é a Mecânica dos sólidos deformáveis, também conhecida como Resistência dos materiais ou Mecânica dos materiais.

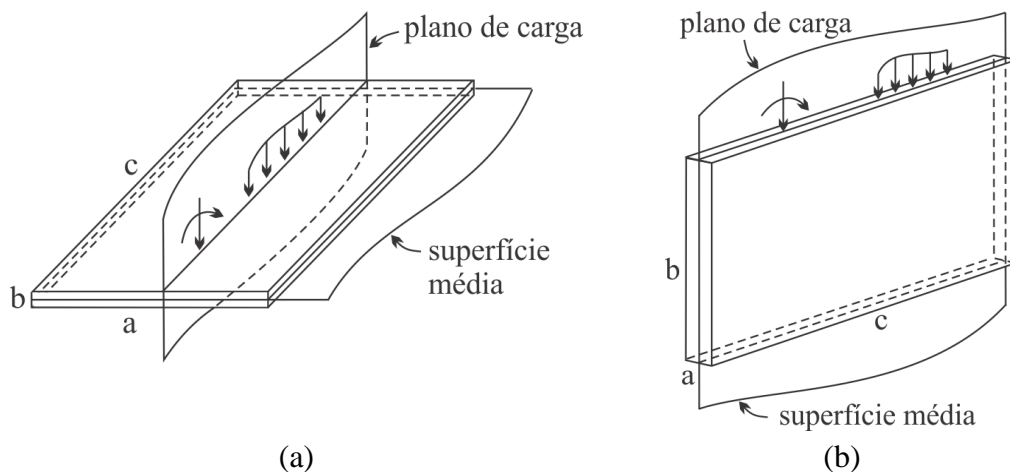
### 1.1 Estrutura e seus elementos

Por estrutura entende-se o conjunto de elementos estruturais agrupados adequadamente a fim de suportar, de modo satisfatório, todas as solicitações externas impostas. Os elementos estruturais podem ser classificados em função do carregamento e de suas dimensões, considerando que duas dimensões são da mesma ordem de grandeza quando a relação entre elas for no máximo igual a 10. O elemento linear ou barra (Figura 1.1a) tem uma dimensão  $c$  muito maior do que as dimensões  $a$  e  $b$ , sendo  $a$  e  $b$  da mesma ordem de grandeza. Já o elemento bidimensional (Figura 1.1b) tem dimensão  $c$  muito menor do que  $a$  e  $b$ , com  $a$  e  $b$  apresentando medidas da mesma ordem de grandeza.



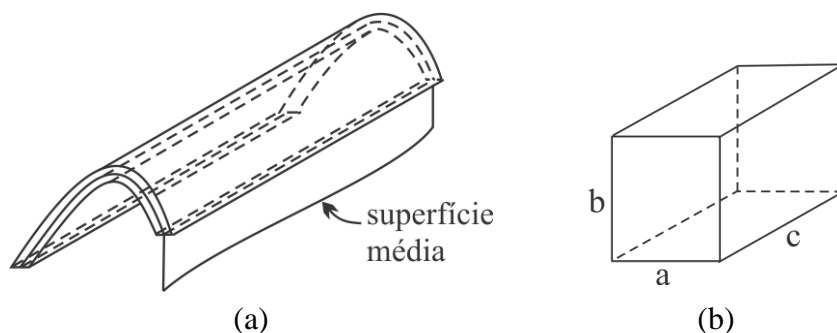
**Figura 1.1** Elementos estruturais: linear ou barra (a); bidimensional (b).

Com o carregamento aplicado perpendicularmente à superfície média do elemento bidimensional, tem-se a placa (Figura 1.2a), e quando o plano de carga coincidir com a superfície média, o elemento bidimensional é denominado chapa (Figura 1.2b).



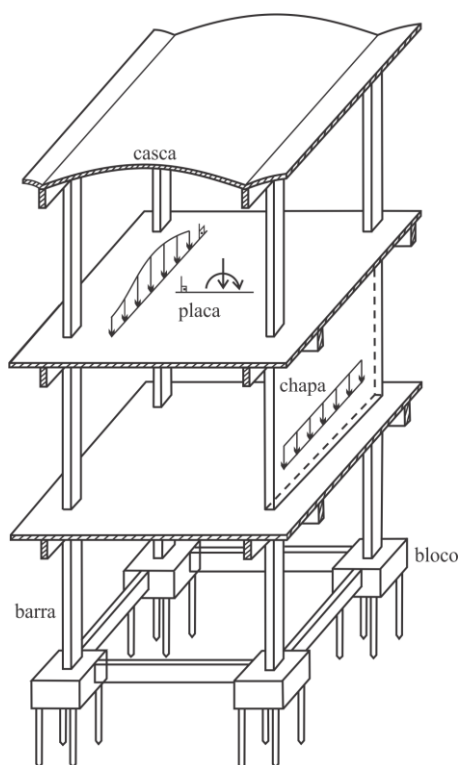
**Figura 1.2** Elementos estruturais: placa (a); chapa (b).

Casca é o elemento bidimensional com a superfície média curva (Figura 1.3a). Nos elementos tridimensionais ou blocos, as três dimensões ( $a$ ,  $b$  e  $c$ ) são da mesma ordem de grandeza (Figura 1.3b).



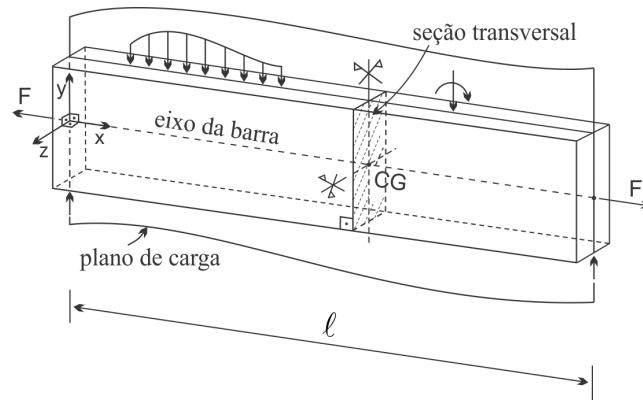
**Figura 1.3** Elementos estruturais: casca (a); bloco (b).

Outros nomes mais específicos são dados aos elementos estruturais conforme as particularidades da estrutura. Parte da estrutura de um prédio (Figura 1.4) agrupa diversos elementos estruturais.



**Figura 1.4** Estrutura de parte de um prédio.

Considere a barra da Figura 1.5, de seção transversal retangular e com todos os esforços (ativos e reativos) atuantes no plano  $xy$ , que contém um dos eixos de simetria da seção transversal a fim de evitar o efeito da torção. O carregamento pode ser constituído de forças e momentos pontuais e de forças distribuídas.

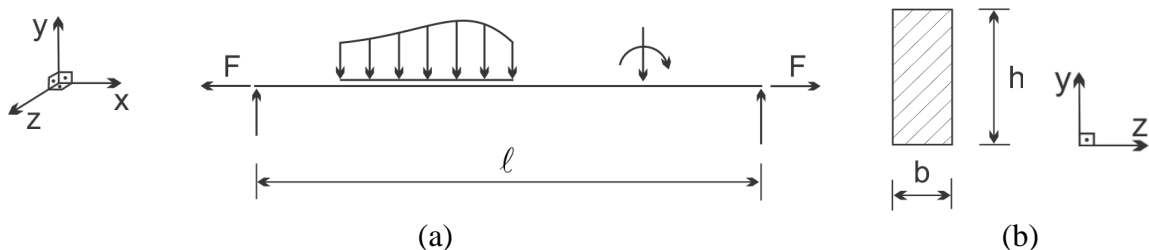


**Figura 1.5** Barra de seção retangular sujeita à ação de forças atuantes no plano xy.

A seção transversal resulta de um corte na barra passando por um plano perpendicular à direção longitudinal. Pelo fato de todo eixo de simetria da seção transversal ser um lugar geométrico do centro geométrico (CG), a dupla simetria da seção transversal retangular permite posicionar o centro geométrico na interseção dos dois eixos de simetria.

A trajetória do centro geométrico das infinitas seções transversais ao longo do comprimento da barra define o eixo, que pode ser reto ou curvo. A barra com eixo reto e seção transversal constante no comprimento é denominada barra prismática.

Por conveniência, a barra da Figura 1.5 pode ser representada por meio de seu eixo (Figura 1.6a), que tem a direção do eixo x, e da seção transversal (Figura 1.6b), localizada no plano yz do sistema de referências arbitrário.



**Figura 1.6** Representação simplificada da barra: vista longitudinal (a); seção transversal (b).

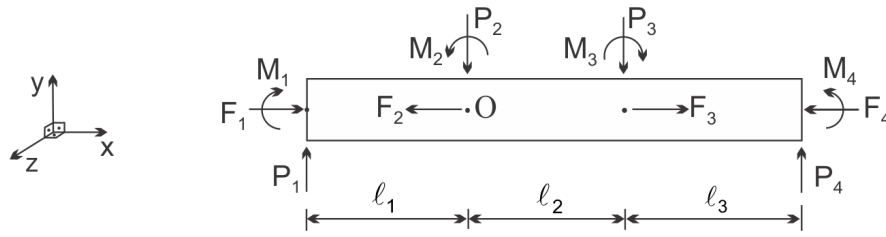
## 1.2 Corpo rígido

Em um corpo rígido sujeito a um conjunto de forças, a distância entre dois pontos diferentes não varia, ou seja, o corpo não se deforma. Utilizando o sistema de coordenadas cartesianas (x, y, z), considera-se uma barra rígida com o seu comprimento na direção do eixo x a fim de escrever as equações de equilíbrio e ilustrar os movimentos de corpo rígido da barra no plano xy.

## 1.3 Equações de equilíbrio

Os esforços ativos e reativos atuam no plano xy, que coincide com o plano de simetria da seção transversal, e as forças  $F_i$  são aplicadas no eixo da barra.

Para o equilíbrio da barra rígida no plano xy, três equações escalares devem ser satisfeitas.



**Figura 1.7** Barra rígida carregada no plano xy.

#### *Equilíbrio das forças na direção do eixo x*

A resultante das forças obtida com um referencial orientado para a direita é igual à resultante das forças com referencial para a esquerda, como evidenciado pelas equações 1.1 e 1.2, respectivamente, ou seja, a força resultante independe da escolha do referencial utilizado na construção da equação de equilíbrio.

$$(\rightarrow +) \sum F_x = 0: +F_1 - F_2 + F_3 - F_4 = 0 \Rightarrow +F_1 + F_3 = +F_2 + F_4 \quad (1.1)$$

$$(\leftarrow +) \sum F_x = 0: -F_1 + F_2 - F_3 + F_4 = 0 \Rightarrow +F_2 + F_4 = +F_1 + F_3 \quad (1.2)$$

#### *Equilíbrio das forças na direção do eixo y*

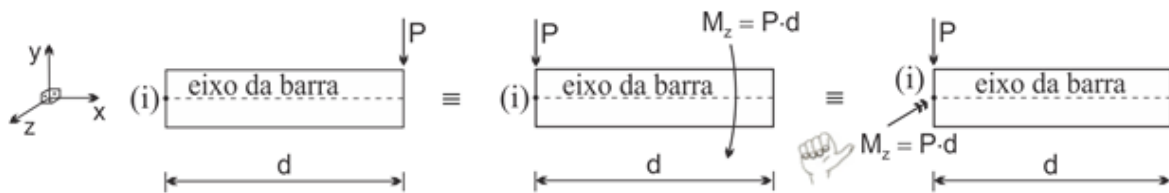
A consideração do referencial positivo orientado para baixo (Equação 1.3) ou para cima (Equação 1.4) conduz à mesma força resultante, assim como comentado anteriormente.

$$(\downarrow +) \sum F_y = 0: -P_1 + P_2 + P_3 - P_4 = 0 \Rightarrow +P_2 + P_3 = +P_1 + P_4 \quad (1.3)$$

$$(\uparrow +) \sum F_y = 0: +P_1 - P_2 - P_3 + P_4 = 0 \Rightarrow +P_1 + P_4 = +P_2 + P_3 \quad (1.4)$$

#### *Equilíbrio de momento em relação ao eixo z*

O momento da força P em relação ao polo (i) é igual ao produto da força P pela distância d. Como visto na mecânica do corpo rígido, a força P pode ser realocada sobre o polo (i) (redução do sistema de forças) levando-se ao polo (i) a força P e o respectivo momento de binário ou conjugado ( $M_z$ ) (módulo:  $P \cdot d$ ; direção: do eixo z; sentido: contrário ao sentido arbitrado do eixo z da Figura 1.8, efeito que pode ser notado com o uso da regra da mão direita, na qual o dedo polegar direito indica o sentido da seta dupla).



**Figura 1.8** Momento da força P em relação ao polo (i).

Em relação ao polo (i), a resultante dos momentos em torno do eixo z no sentido horário (h) é igual à resultante dos momentos no sentido anti-horário (ah), como pode ser notado nas equações 1.5 e

1.6, respectivamente. Cabe ressaltar que essas duas equações foram escritas considerando o polo (i) no ponto O indicado na Figura 1.7, porém o resultado do equilíbrio de momentos é o mesmo e independe da escolha da posição do polo (i) ou do sentido positivo adotado como referencial para a construção dessa equação de equilíbrio (em momentos).

$$(h_+) \sum M_O = 0: +M_1 + P_1 \cdot \ell_1 - M_2 + M_3 + P_3 \cdot \ell_2 - M_4 - P_4 \cdot (\ell_2 + \ell_3) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow +M_1 + P_1 \cdot \ell_1 + M_3 + P_3 \cdot \ell_2 = +M_2 + M_4 + P_4 \cdot (\ell_2 + \ell_3) \quad (1.5)$$

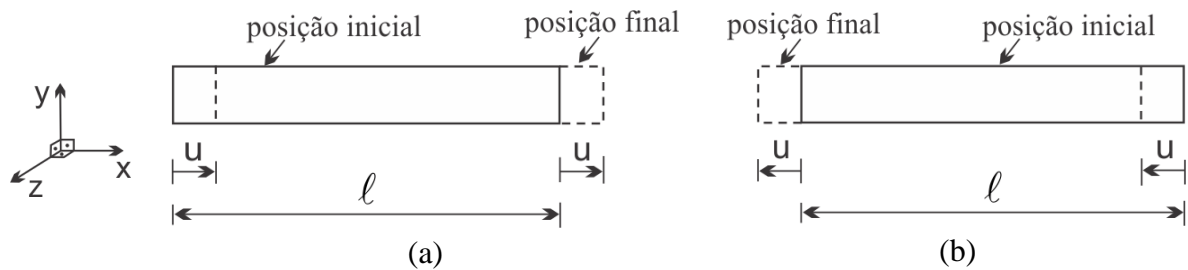
$$(ah_+) \sum M_O = 0: -M_1 - P_1 \cdot \ell_1 + M_2 - M_3 - P_3 \cdot \ell_2 + M_4 + P_4 \cdot (\ell_2 + \ell_3) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow +M_2 + M_4 + P_4 \cdot (\ell_2 + \ell_3) = +M_1 + P_1 \cdot \ell_1 + M_3 + P_3 \cdot \ell_2 \quad (1.6)$$

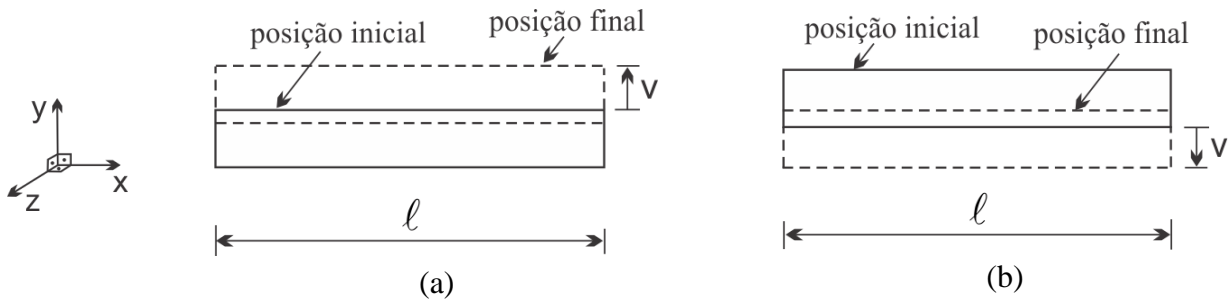
#### 1.4 Movimentos de corpo rígido no plano xy (graus de liberdade)

As figuras 1.9, 1.10 e 1.11 ilustram os movimentos de corpo rígido possíveis de uma barra rígida situada no plano xy. Em três dimensões, o corpo rígido tem seis possibilidades de movimento independentes, sendo três translações (nas direções dos eixos x, y e z, linearmente independentes) e três rotações (em torno dos eixos x, y e z), resultando em seis graus de liberdade ao todo. Em duas dimensões (plano xy de referência), a barra tem apenas três graus de liberdade, que consistem em um movimento de translação na direção do eixo x (Figura 1.9), um movimento de translação na direção do eixo y (Figura 1.10) e um de rotação em torno do eixo z (Figura 1.11).

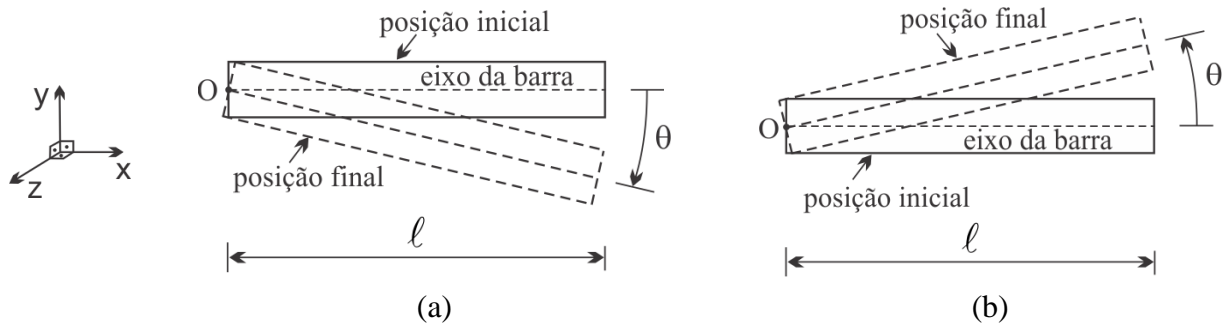
Isso implica que, para que o corpo rígido esteja em equilíbrio, todos os seus graus de liberdade (possibilidades de movimento independentes, a saber, translações ou giros) devem estar restritos e tais restrições surgem com a inserção de vínculos (elementos de fixação) na estrutura.



**Figura 1.9** Deslocamento linear  $u$  da barra rígida na direção horizontal: translação para a direita (a) e para a esquerda (b).



**Figura 1.10** Deslocamento linear  $v$  da barra rígida na direção vertical: translação para cima (a) e para baixo (b).



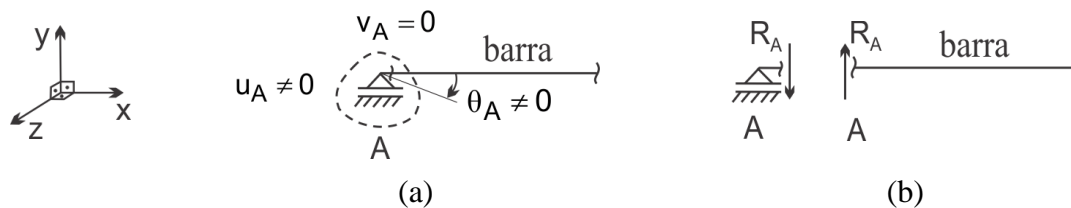
**Figura 1.11** Rotação  $\theta$  da barra rígida em torno do eixo  $z$ : sentido horário (a) e anti-horário (b).

### 1.5 Vinculação dos sistemas planos

Os tipos de vínculo são caracterizados pelos graus de liberdade que restringem (translações ou rotação), sendo que para cada movimento impedido surge um esforço correspondente, ou seja, considera-se uma força reativa quando impede um deslocamento linear (translação) e um momento reativo quando impede um deslocamento angular (rotação). Entre os diversos tipos de vínculo existentes são considerados apenas três: apoio móvel ou do 1º gênero (Figura 1.12), apoio fixo ou apoio do 2º gênero (Figura 1.13) e engastamento fixo ou apoio do 3º gênero (Figura 1.14). Nas figuras 1.12 a 1.14 cabe destacar que os esforços reativos na barra são indicados imaginando-se um corte bem próximo ao vínculo considerado.

#### 1.5.1 Apoio móvel

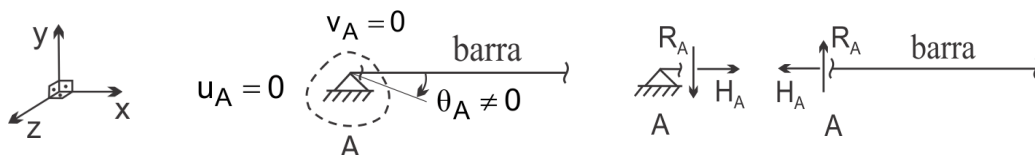
No apoio móvel da Figura 1.12a, em decorrência do movimento de translação ser impedido na direção do eixo  $y$  ( $v_A = 0$ ), considera-se a força reativa  $R_A$ , cujo sentido pode ser adotado arbitrariamente (Figura 1.12b). O movimento da barra na direção do eixo  $x$  ( $u_A \neq 0$ ) não é impedido, e consequentemente não há força reativa ( $H_A$ ) nessa direção. Da mesma forma, o movimento de rotação da barra em torno do eixo  $z$  ( $\theta_A \neq 0$ ) não é impedido, não havendo consequentemente momento reativo  $M_A$ .



**Figura 1.12** Apoio móvel: deslocamentos (a); reação de vínculo (b).

#### 1.5.2 Apoio fixo

Na Figura 1.13a, em decorrência dos movimentos de translação serem impedidos nas direções dos eixos  $x$  ( $u_A = 0$ ) e  $y$  ( $v_A = 0$ ), consideram-se as forças reativas  $H_A$  e  $R_A$ , cujos sentidos podem ser adotados arbitrariamente (Figura 1.13b). O movimento de rotação da barra em torno do eixo  $z$  ( $\theta_A \neq 0$ ) não é impedido, e consequentemente não há momento reativo  $M_A$ .

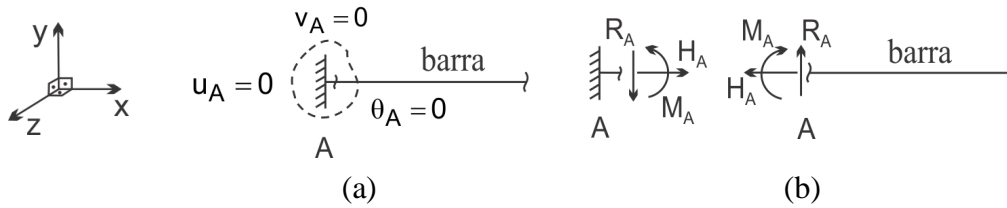


(a)

(b)

**Figura 1.13** Apoio fixo: deslocamentos (a); reações de vínculos (b).**1.5.3 Engastamento fixo**

As forças reativas  $H_A$  e  $R_A$  com os sentidos adotados arbitrados na Figura 1.14b devem ser consideradas em decorrência dos movimentos de translação da barra impedidos nas direções dos eixos  $x$  ( $u_A = 0$ ) e  $y$  ( $v_A = 0$ ) (Figura 1.14a), respectivamente. O momento reativo  $M_A$  também deve ser considerado, pois a barra é impedida de girar em torno do eixo  $z$  ( $\theta_A = 0$ ).

**Figura 1.14** Engastamento fixo: deslocamentos (a); reações de vínculos (b).

Na Tabela 1.1 são apresentadas as denominações dos vínculos, seus respectivos símbolos e esforços reativos, bem como o número de movimentos ou de graus de liberdade impedidos (restritos).

**Tabela 1.1** Síntese da funcionalidade dos vínculos discutidos.

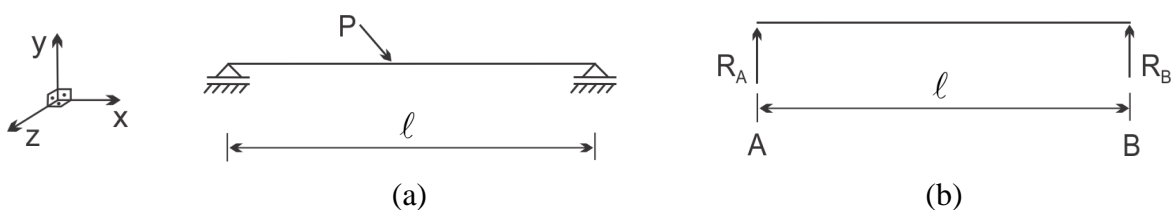
Nome do vínculo	Símbolo	Esforços na barra – reações de vínculos	Número de movimentos impedidos
Apoio móvel			1 – uma translação
Apoio fixo			2 – duas translações
Engastamento fixo			3 – duas translações e uma rotação

**1.6 Classificação da estrutura**

Em função do número de reações de vínculos e do número de equações de equilíbrio da estática ( $\Sigma F_x = 0$ ,  $\Sigma F_y = 0$ ,  $\Sigma M_i = 0$ ), a estrutura pode ser classificada em hipostática, isostática ou hiperestática.

**1.6.1 Estrutura hipostática**

Nas estruturas denominadas hipostáticas, os vínculos não são suficientes para impedir os movimentos de corpo rígido, como ilustra a viga da Figura 1.15, em que a barra pode movimentar-se na direção do eixo  $x$ .

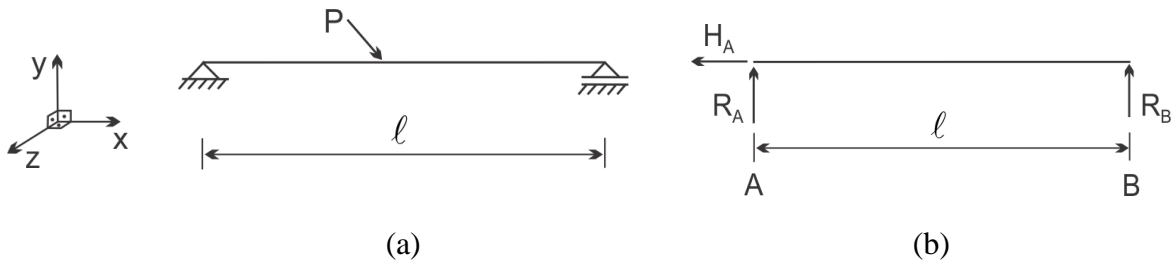


**Figura 1.15** Exemplo de viga hipostática: vínculos e carregamento (a); reações de vínculos na barra (b).

O número de reações de vínculos é inferior ao número de equações de equilíbrio, pois são duas reações incógnitas ( $R_A$ ,  $R_B$ ) (Figura 1.15b) e três equações de equilíbrio disponíveis ( $\Sigma F_x = 0$ ,  $\Sigma F_y = 0$ ,  $\Sigma M_i = 0$ ). Dessa forma, faltam vínculos para garantir o equilíbrio da estrutura.

### 1.6.2 Estrutura isostática ou estaticamente determinada

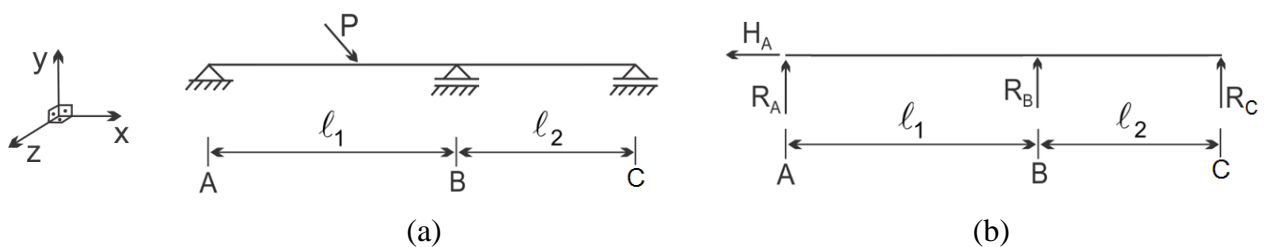
Nas estruturas denominadas isostáticas ou estaticamente determinadas, os vínculos são suficientes para impedir os movimentos de translação e de rotação da estrutura. Para a viga da Figura 1.16a, o número de reações de vínculos (Figura 1.16b) é igual ao número de equações de equilíbrio, visto que são três reações incógnitas ( $H_A$ ,  $R_A$ ,  $R_B$ ) e três equações de equilíbrio disponíveis ( $\Sigma F_x = 0$ ,  $\Sigma F_y = 0$ ,  $\Sigma M_i = 0$ ), o que a classifica como estrutura isostática.



**Figura 1.16** Exemplo de viga isostática: vínculos e carregamento (a); reações de vínculos na barra (b).

### 1.6.3 Estrutura hiperestática ou estaticamente indeterminada

Na estrutura hiperestática ou estaticamente indeterminada há vínculos em excesso (superabundantes ao equilíbrio) para impedir os movimentos de translação e de rotação, como ilustra a viga da Figura 1.17.

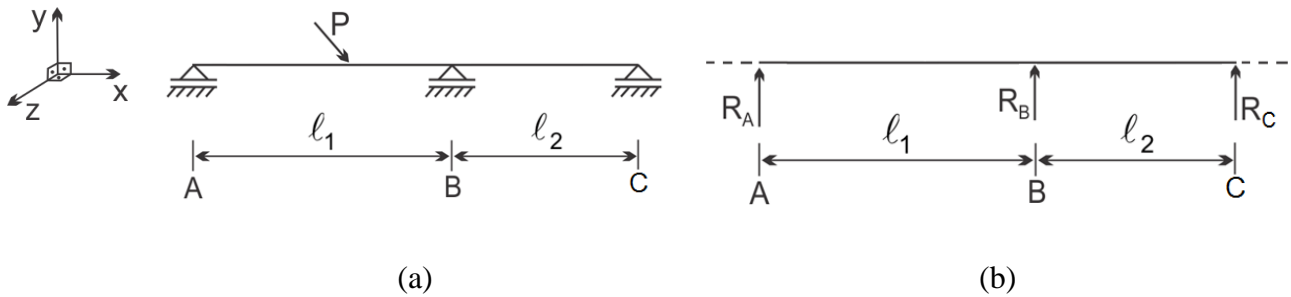


**Figura 1.17** Exemplo de viga hiperestática: vínculos e carregamento (a); reações de vínculos na barra (b).

O número de reações de vínculos é superior ao número de equações de equilíbrio, pois são quatro reações incógnitas ( $H_A$ ,  $R_A$ ,  $R_B$ ,  $R_C$ ) e três equações de equilíbrio disponíveis ( $\Sigma F_x = 0$ ,  $\Sigma F_y = 0$ ,  $\Sigma M_i = 0$ ), implicando um sistema estaticamente indeterminado no qual as reações não podem ser calculadas apenas com as equações de equilíbrio.

Cabe destacar que o número de equações de equilíbrio igual ou inferior ao número de incógnitas (forças ou momentos reativos de vínculo) é condição necessária, mas não suficiente, para assegurar o equilíbrio da estrutura, como ilustra a barra da Figura 1.18, classificada como caso excepcional.





**Figura 1.18** Exemplo de caso excepcional: vínculos e carregamento (a); reações de vínculos na barra (b).

Na viga da Figura 1.18 nota-se que são três as equações de equilíbrio e que são três também as forças reativas incógnitas ( $R_A$ ,  $R_B$ ,  $R_C$ ). Entretanto essa estrutura não é isostática, pois a combinação dos três vínculos (apoios móveis) não é adequada, a ponto de restringir os deslocamentos horizontais de corpo rígido, e tais situações devem ser evitadas na concepção do sistema estrutural idealizado pelo engenheiro.

### 1.7 Carregamento

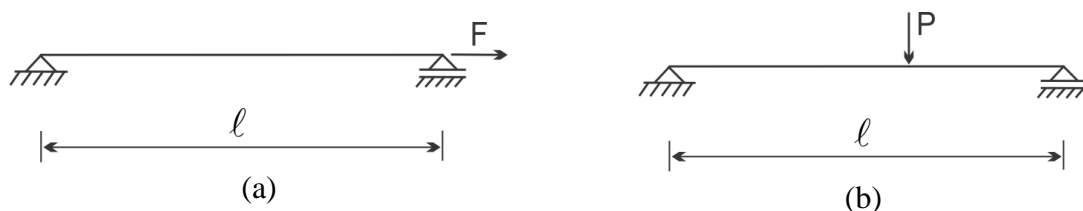
As cargas atuantes nas estruturas podem ser de natureza volumétrica (forças de campo – peso próprio) ou de contato (superficiais).

Nos elementos de barra, a largura  $b$  e a altura  $h$  da seção transversal (Figura 1.6) são significativamente inferiores ao comprimento  $\ell$ . Uma força distribuída na superfície ( $p(x, z)$  – força por unidade de área) superior da seção transversal (plano  $xz$ , que contém as medidas  $\ell$  e  $b$ ) pode ser reduzida a uma força por unidade de comprimento ( $p(x)$ ) multiplicando-se a força distribuída na referida superfície pela medida  $b$  da largura da seção transversal ( $p(x) = p(x, z) \cdot b$ ), visto que tal força praticamente não varia ao longo da espessura (pequena dimensão). Se a força distribuída atua em uma pequena região ao longo do comprimento, essa carga pode ser idealizada como concentrada, hipótese considerada até o presente momento.

Por serem as forças distribuídas por unidade de comprimento (assim como as forças pontuais) comumente encontradas nos projetos estruturais, faz-se necessário tratamento matemático adequado para que se possa avaliar o equilíbrio das estruturas solicitadas por tais forças.

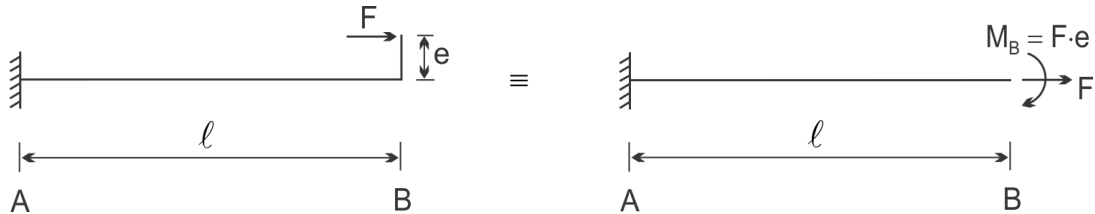
#### 1.7.1 Carregamento concentrado

Como comentado, força concentrada ou pontual é aquela que atua em uma área pequena quando comparada com as dimensões da barra. A força longitudinal  $F$  (Figura 1.19a) atuando no eixo da barra é denominada força axial, enquanto a força  $P$  (Figura 1.19b) perpendicular ao eixo da barra é conhecida como força de corte. A unidade de força no Sistema Internacional de Unidades é o Newton (N), sendo comum, pela magnitude das cargas nas estruturas, a utilização do prefixo  $k$  ( $kN = 1.000\text{ N}$ ).



**Figura 1.19** Forças concentradas: longitudinal (a); transversal (b).

Na barra da Figura 1.20, a força longitudinal concentrada  $F$  é aplicada excentricamente (excentricidade  $e$ ) em relação ao eixo da barra. Ao transladar essa força para o eixo da barra (redução da força  $F$  ao ponto B), o momento de binário ( $M_B = F \cdot e$ ) deve ser considerado. Cabe ressaltar que a unidade do momento é a unidade de força vezes a unidade de comprimento ( $N \cdot m$ ,  $N \cdot cm$ ,  $kN \cdot m$ ,  $kN \cdot cm$ ...).

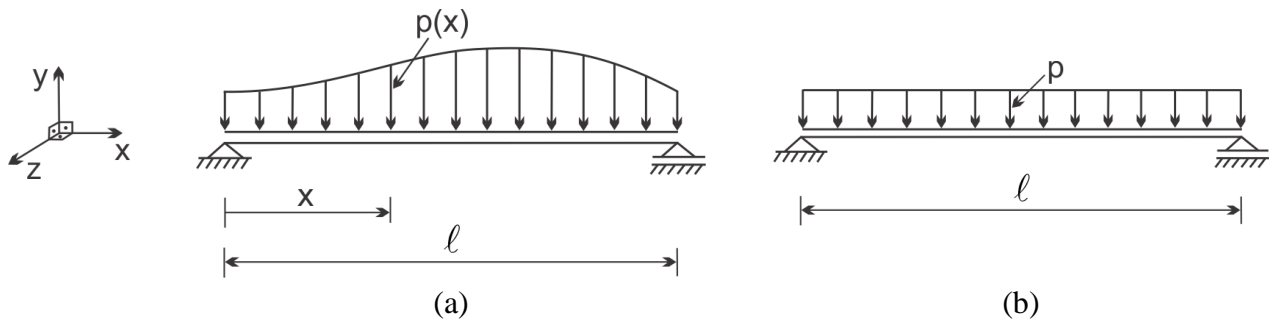


**Figura 1.20** Redução da força  $F$  ao ponto B: força ( $F$ ) e momento de binário ( $M_B$ ) resultante.

### 1.7.2 Carregamento distribuído

Como já comentado, força distribuída é aquela que atua ao longo de um comprimento ou de uma área (superfície). Para as forças por unidade de comprimento ( $p(x)$ ), as unidades podem ser:  $N/m$ ,  $N/cm$ ,  $kN/m$ ,  $kN/cm$  etc.

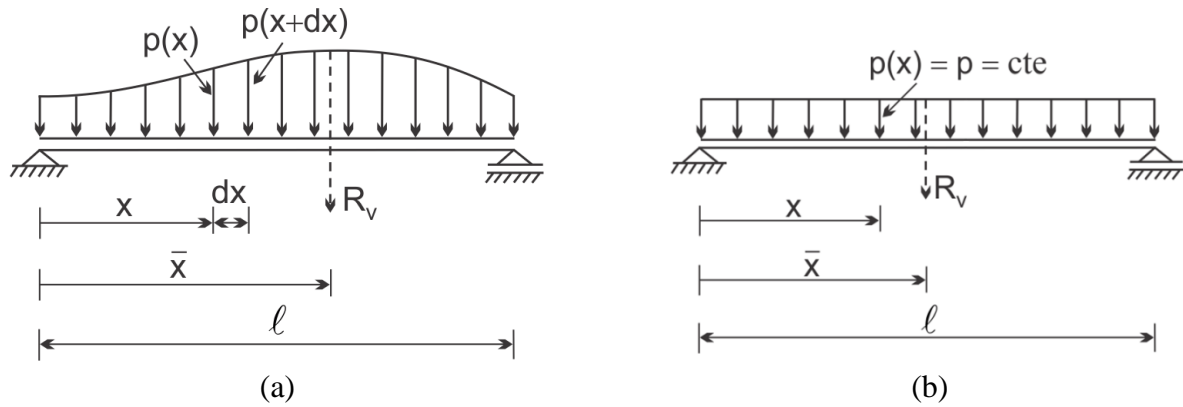
Uma barra biapoiada, isostática e de comprimento  $\ell$  é utilizada a fim de ilustrar a ação de uma força distribuída por unidade de comprimento  $p(x)$  de variação não uniforme (Figura 1.21a) e uniformemente distribuída (Figura 1.21b), respectivamente.



**Figura 1.21** Forças distribuídas: distribuição não uniforme (a); distribuição uniforme (b).

Para duas seções transversais próximas  $x$  e  $x + dx$  (Figura 1.22a), a área (de um trapézio) sob a função  $p(x)$  nessa região resulta na Equação 1.7, que consiste em uma força elementar ( $dR_v$ ) concentrada e situada em um ponto entre  $x$  e  $x + dx$ .

$$dR_v = \left[ \frac{p(x) + p(x + dx)}{2} \right] \cdot dx \quad (1.7)$$



**Figura 1.22** Forças distribuídas  $p(x)$ : distribuição não uniforme (a); distribuição uniforme (b).

Fazendo  $dx$  tender a 0, a Equação 1.7 resulta na Equação 1.8 (força elementar), que geometricamente é equivalente à área de um retângulo de base infinitesimal  $dx$  e altura variável  $p(x)$ .

$$dR_v = p(x) \cdot dx \quad (1.8)$$

A resultante das forças na direção do eixo  $y$  ( $R_v$ ) é obtida pela soma (integral) das infinitas forças elementares (Equação 1.8) que atuam ao longo do comprimento da barra ( $0, \ell$ ), expressa pela Equação 1.9.

$$R_v = \int_0^\ell p(x) \cdot dx \quad (1.9)$$

Determinada a força resultante  $R_v$  fictícia, a localização ( $\bar{x}$ ) dessa resultante ao longo do comprimento  $\ell$  deve provocar na barra os mesmos efeitos que o carregamento original  $p(x)$ , obtido com o princípio dos momentos ou Teorema de Varignon, em que o momento da força resultante ( $Mr$ ) em relação a um determinado ponto (polo  $i$ ) eleito é igual à soma dos momentos ( $M$ ) das componentes dessa força ( $Mr_{(i)} = \sum M_{(i)}$ ).

O momento da força resultante em relação à origem ( $O$ ) do sistema de referências (Figura 1.22a) é dado pelo produto da força  $R_v$  pela coordenada  $\bar{x}$ , enquanto o momento de uma força elementar (componente da força resultante) é obtido pelo produto entre a força elementar  $dR_v = p(x) \cdot dx$  e a distância  $x$ . Do teorema dos momentos, a localização ( $\bar{x}$ ) da força resultante é expressa pela Equação 1.10.

$$\underbrace{\int_0^\ell p(x) \cdot dx \cdot \bar{x}}_{R_v} = \underbrace{\int_0^\ell p(x) \cdot x \cdot dx}_{\sum M_o} \Rightarrow \bar{x} = \frac{\int_0^\ell p(x) \cdot x \cdot dx}{\int_0^\ell p(x) \cdot dx} \quad (1.10)$$

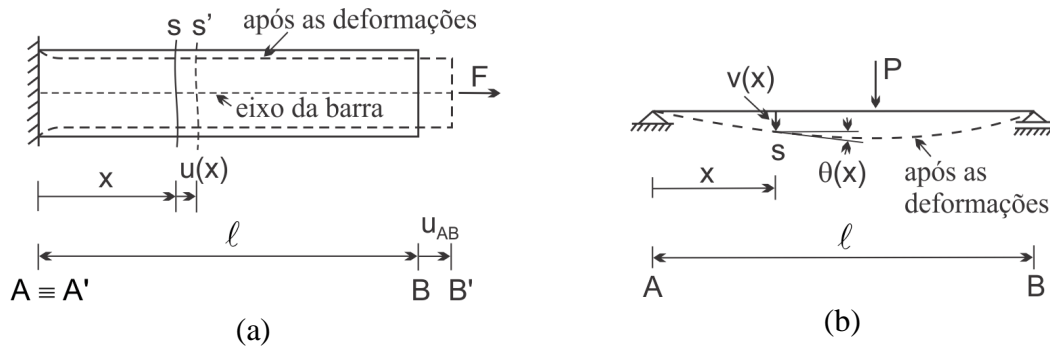
Geometricamente, a coordenada  $\bar{x}$  da localização da força resultante  $R_v$  consiste na coordenada do centro geométrico da área sob a função carga e a força resultante é equivalente à área sob a função carga  $p(x)$ . Para o carregamento uniforme ( $p(x) = p$ ) da Figura 1.21b, a força resultante e coordenada  $\bar{x}$  são expressas pelas equações 1.11 e 1.12, respectivamente.

$$R_v = \int_0^\ell p \cdot dx = p \cdot \int_0^\ell dx = p \cdot x \Big|_0^\ell = p \cdot \ell \quad (1.11)$$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^\ell p \cdot x \cdot dx}{\int_0^\ell p \cdot dx} = \frac{p \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^\ell}{p \cdot x \Big|_0^\ell} = \frac{p \cdot \frac{\ell^2}{2}}{p \cdot \ell} = \frac{\ell}{2} \quad (1.12)$$

### 1.7.3 Efeitos do carregamento

Admite-se que ao solicitar a barra é possível ocorrer deformações, ou seja, a distância entre dois pontos distintos não é a mesma antes e depois das deformações. O movimento da barra depende do tipo de solicitação e dos deslocamentos impedidos pelos vínculos, como ilustram as figuras 1.23a e 1.23b.

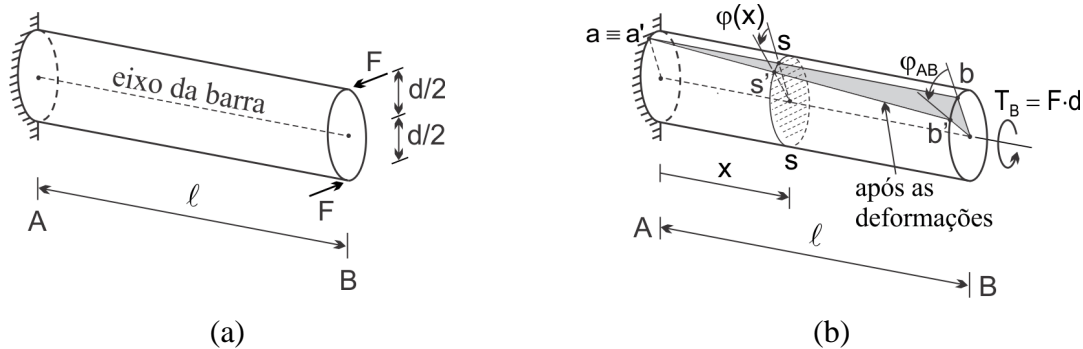


**Figura 1.23** Deformações provocadas por forças atuantes na direção longitudinal (a) e transversal (b) ao eixo da barra.

Na barra engastada da Figura 1.23a, considerando apenas o efeito das forças axiais, a força  $F$  provoca alongamento ( $u_{AB}$ ) do eixo de comprimento original (não deformado)  $\ell$ . Os pontos da seção A não se deslocam por imposição do engastamento fixo, sendo a posição inicial coincidente com a posição final ( $A \equiv A'$ ). Em relação à posição fixa da seção A após as deformações, os pontos da seção  $s$  se deslocam para  $s'$ , gerando o deslocamento longitudinal  $u(x)$ , e os pontos da seção B se deslocam para  $B'$ , resultando no deslocamento longitudinal  $u_{AB}$ .

Ao aplicar a força transversal  $P$  na barra biapoiada da Figura 1.23b ocorre flexão, de modo que nas seções A e B os deslocamentos transversais são nulos ( $v_A = 0$  e  $v_B = 0$ ) em razão dos apoios. Adotando uma coordenada  $x$  é possível determinar para cada seção  $s$  o deslocamento transversal  $v(x)$  e a rotação  $\theta(x)$ . A barra é denominada viga quando o efeito da flexão é preponderante.

Na barra engastada de seção transversal circular (de diâmetro  $d$ ) da Figura 1.24a observa-se que na seção B as forças  $F$  aplicadas na direção perpendicular ao eixo da barra geram o momento de torção ( $T_B = F \cdot d$  – conjugado) em torno do eixo  $x$  (Figura 1.24b). Considerando apenas o efeito da torção, um ponto da seção A não se desloca por imposição do engastamento fixo, sendo a posição inicial coincidente com a posição final ( $a \equiv a'$ ). Em relação à posição fixa da seção A após as deformações, o ponto  $s$  se desloca para  $s'$ , gerando a rotação  $\phi(x)$ , e o ponto  $b$  se desloca para  $b'$ , gerando a rotação  $\phi_{AB}$ . A barra de seção transversal circular e solicitada apenas por momentos de torção é denominada eixo.



**Figura 1.24** Torção: carregamento (a); deslocamentos (b).

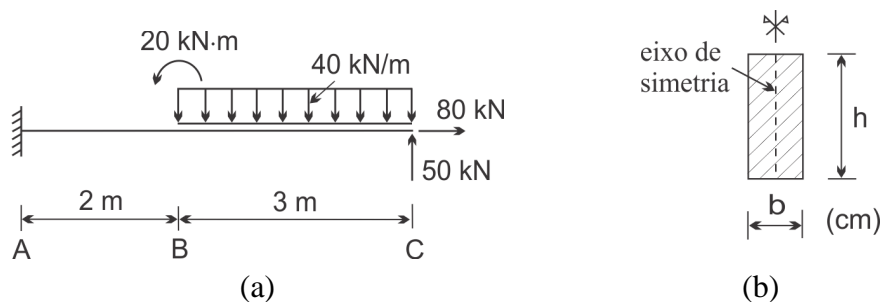
### 1.8 Cálculo das reações

Nas estruturas isostáticas, que são estaticamente determinadas, as equações de equilíbrio da estática são suficientes para determinar as reações de vínculos.

As equações de equilíbrio para os corpos rígidos avaliados no plano, como comentado anteriormente, são três, pois são três os graus de liberdade. A combinação das equações de equilíbrio para a análise de uma estrutura pode ser:

- Duas equações de equilíbrio em forças ( $\Sigma F_x = 0$ ;  $\Sigma F_y = 0$ ) e uma equação de equilíbrio de momentos em relação a um determinado ponto de referência (i) ( $\Sigma M_i = 0$ );
- Uma equação de equilíbrio em forças ( $\Sigma F_x = 0$  ou  $\Sigma F_y = 0$ ) e duas equações de equilíbrio de momentos em relação a dois pontos de referência (A e B) distintos ( $\Sigma M_A = 0$ ;  $\Sigma M_B = 0$ );
- Três equações de equilíbrio em momentos em relação a três pontos independentes (A, B e C) e não *colineares* ( $\Sigma M_A = 0$ ;  $\Sigma M_B = 0$ ;  $\Sigma M_C = 0$ ).

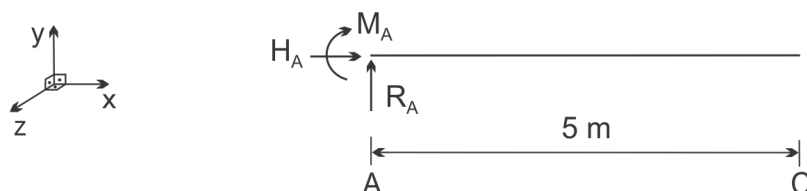
Como exemplificação dos procedimentos de cálculo, determine as reações (esforços reativos ou de vínculo) da barra engastada da Figura 1.25a considerando os esforços ativos e reativos atuantes no plano que contém o eixo de simetria da seção transversal (Figura 1.25b). A força longitudinal é axial.



**Figura 1.25** Barra engastada: vista longitudinal (a); seção transversal (b).

### Classificação da estrutura

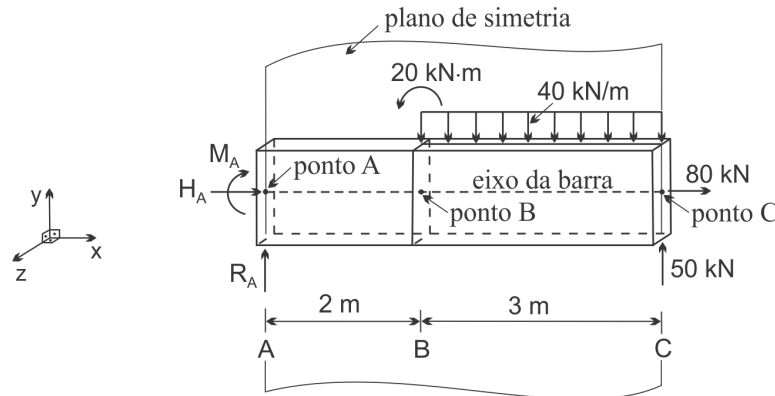
A Figura 1.26 ilustra as forças reativas de vínculo atuantes na viga. Por serem três reações de vínculos ( $H_A$ ,  $R_A$ ,  $M_A$ ) e três equações de equilíbrio ( $\Sigma F_x = 0$ ,  $\Sigma F_y = 0$ ,  $\Sigma M_i = 0$ ), a estrutura é isostática.



**Figura 1.26** Reações de vínculos (engastamento fixo).

### Reações

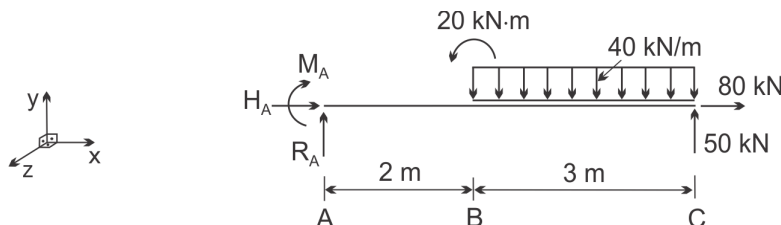
Nas seções A, B e C são definidos no eixo da barra, respectivamente, os pontos A, B e C indicados na Figura 1.27.



**Figura 1.27** Definição dos pontos A, B e C ao longo do eixo da barra.

O plano de simetria é o lugar geométrico de um ponto denominado centro de torção ou centro de cisalhamento (CC), por onde deve passar o carregamento transversal a fim de evitar o efeito de torção do eixo.

Ao representar a barra da Figura 1.27 por meio de seu eixo (Figura 1.28), as letras A, B e C podem indicar seção ou ponto.



**Figura 1.28** Esforços ativos e reativos atuantes ao longo do eixo da barra.

### Equilíbrio das forças na direção do eixo x

Dos esforços atuantes na barra da Figura 1.29 são consideradas apenas as forças axiais.



**Figura 1.29** Forças na direção do eixo x.

Do equilíbrio das forças na direção do eixo x resulta

$$(\rightarrow_+) \sum F_x = 0: H_A + 80 = 0 \Rightarrow H_A = -80 \text{ kN}$$

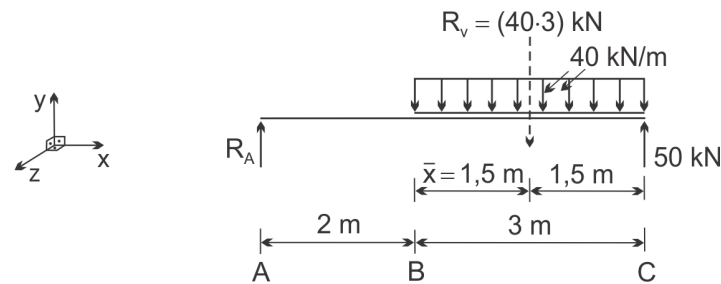
ou

$$(\leftarrow_+) \sum F_x = 0: -H_A - 80 = 0 \Rightarrow H_A = -80 \text{ kN}$$

A reação  $H_A = 80 \text{ kN}$  negativa indica que para equilibrar a barra na direção longitudinal (eixo x), o sentido de  $H_A$  é oposto ao sentido arbitrado na Figura 1.29.

#### *Equilíbrio das forças na direção do eixo y*

Dos esforços atuantes na barra da Figura 1.30 são consideradas apenas as forças transversais.



**Figura 1.30** Forças atuantes na direção do eixo y.

A resultante  $R_v = (40 \cdot 3) \text{ kN}$ , posicionada na metade do trecho BC ( $\bar{x} = 1,5 \text{ m}$ ), é a força concentrada equivalente à carga distribuída uniformemente  $p = 40 \text{ kN/m}$ .

Do equilíbrio das forças na direção do eixo y resulta

$$(\uparrow_+) \sum F_y = 0: R_A - (40 \cdot 3) + 50 = 0 \Rightarrow R_A = 70 \text{ kN}$$

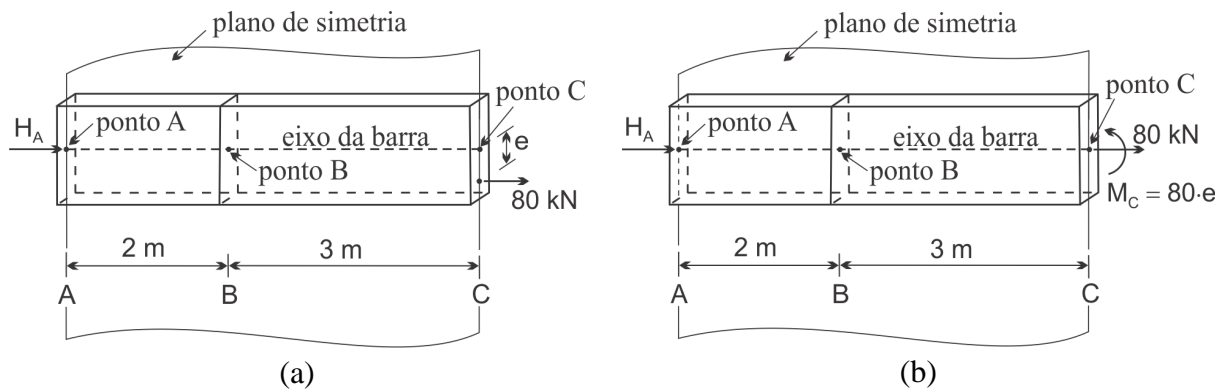
ou

$$(\downarrow_+) \sum F_y = 0: -R_A + (40 \cdot 3) - 50 = 0 \Rightarrow R_A = 70 \text{ kN}$$

A reação  $R_A = 70 \text{ kN}$  positiva indica que para equilibrar a barra na direção transversal (eixo y), o sentido arbitrado de  $R_A$  (Figura 1.30) deve ser mantido.

#### *Equilíbrio de momentos em torno do eixo z*

A fim de analisar a influência da posição das forças longitudinais na equação de equilíbrio de momentos, é feita uma pequena variação no problema originalmente proposto pela Figura 1.27, admitindo-se a força longitudinal  $80 \text{ kN}$  realocada para uma posição fora do eixo da barra (Figura 1.31a). Nessas condições, a excentricidade é diferente de zero resulta em um momento ou conjugado ( $M_C = 80 \cdot e$ , conforme a Figura 1.31b) que provoca flexão em torno do eixo z (perpendicular ao plano de simetria).



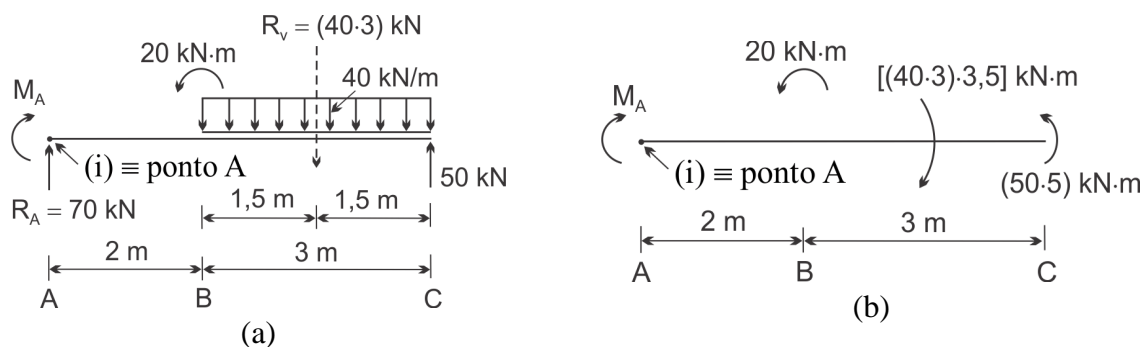
**Figura 1.31** Força 80 kN: excêntrica (a); axial (b).

Na Figura 1.25a, o fato de a força de 80 kN ser axial implica que ela atua na direção do eixo da barra, e, por esta razão, a excentricidade é nula ( $e = 0$ ), resultando no momento  $M_C = 80 \cdot 0 = 0$ . Portanto, as forças longitudinais  $H_A$  e 80 kN consideradas axiais não influem na equação de equilíbrio de momentos.

As forças transversais  $R_A$ ,  $R_v$  e 50 kN geram momentos em função da distância até o polo (i) escolhido arbitrariamente. A fim de mostrar a influência da posição do polo (i), as equações de equilíbrio de momentos são escritas considerando o polo (i) nos pontos A, B e C.

*a) Polo (i) no ponto A*

A Figura 1.32a ilustra as forças e os momentos ativos juntamente com o momento relativo incógnito  $M_A$  e a Figura 1.32b, o momento  $M_A$ , o momento de intensidade  $20 \text{ kN} \cdot \text{m}$  (originalmente aplicado na estrutura) e os momentos de intensidade  $(40 \cdot 3 \cdot 3,5) = 420 \text{ kN} \cdot \text{m}$  e  $(50 \cdot 5) = 250 \text{ kN} \cdot \text{m}$ , obtidos da força distribuída e da força de 50 kN em relação ao ponto A (polo considerado), respectivamente.



**Figura 1.32** Polo (i) no ponto A: carregamento (a); momentos (b).

Cabe destacar que a distância da resultante  $R_v = (40 \cdot 30) \text{ kN}$  ao polo (ponto A) é igual a 3,5 m ( $2 \text{ m} + 1,5 \text{ m}$ ), sendo 5 m ( $2 \text{ m} + 3 \text{ m}$ ) a menor distância entre a linha de ação da força de 50 kN e o ponto A, gerando, respectivamente, os momentos  $((40 \cdot 3) \cdot 3,5) \text{ kN} \cdot \text{m}$  e  $(50 \cdot 5) \text{ kN} \cdot \text{m}$  com os sentidos indicados na Figura 1.32b. A reação  $R_A = 70 \text{ kN}$  não gera momento, pois a distância dessa força ao ponto A é nula.

Da equação de momentos em relação ao ponto A resulta

$$(h_+) \sum M_A = 0: M_A - 20 + (40 \cdot 3) \cdot 3,5 - 50 \cdot 5 = 0 \Rightarrow M_A = -150 \text{ kN} \cdot \text{m}$$



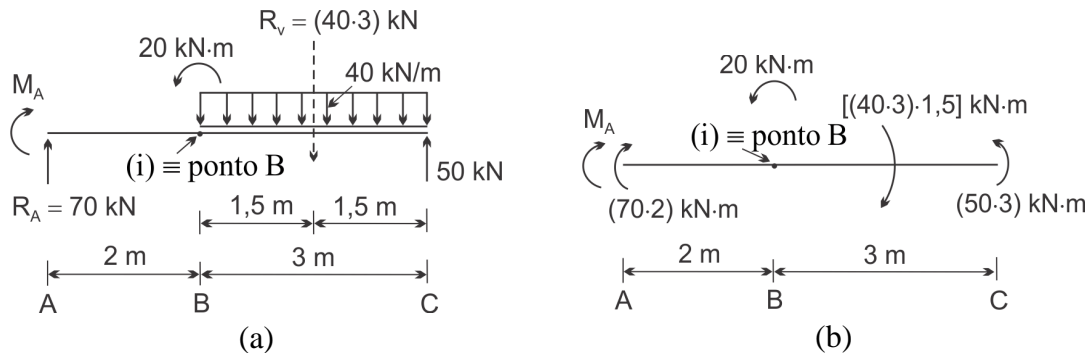
ou

$$(ah_+) \sum M_A = 0: -M_A + 20 - (40 \cdot 3) \cdot 3,5 + 50 \cdot 5 = 0 \Rightarrow M_A = -150 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

O momento reativo de vínculo  $M_A$  negativo indica que seu sentido para o equilíbrio da estrutura é oposto ao sentido arbitrado (horário) na Figura 1.32.

*b) Polo (i) no ponto B*

A Figura 1.33a ilustra a nova posição do polo (ponto B) e a Figura 1.33b apresenta o momento  $M_A$  (incógnito), o momento de intensidade  $20 \text{ kN} \cdot \text{m}$  (originalmente aplicado na estrutura) e os momentos da força distribuída  $(40 \cdot 3) \text{ kN}$  e das forças concentradas ( $50 \text{ kN}$  e  $70 \text{ kN} = R_A$ ) obtidos em relação ao ponto B.



**Figura 1.33** Polo (i) no ponto B: carregamento (a); momentos (b).

A distância da reação  $R_A = 70 \text{ kN}$  ao polo no ponto B é de  $2 \text{ m}$ , da resultante  $R_V = (40 \cdot 3) \text{ kN}$  é  $1,5 \text{ m}$  e da força  $50 \text{ kN}$  é  $3 \text{ m}$ , gerando, respectivamente, os momentos  $(70 \cdot 2) \text{ kN} \cdot \text{m}$ ,  $((40 \cdot 3) \cdot 1,5) \text{ kN} \cdot \text{m}$  e  $(50 \cdot 3) \text{ kN} \cdot \text{m}$  com os sentidos indicados na Figura 1.33b.

Da equação de momentos em relação ao ponto B resulta

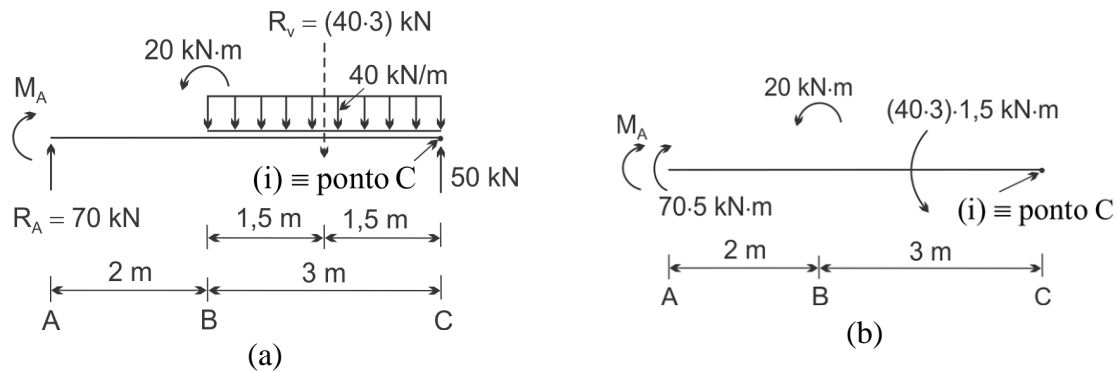
$$(h_+) \sum M_B = 0: M_A + 70 \cdot 2 - 20 + (40 \cdot 3) \cdot 1,5 - 50 \cdot 3 = 0 \Rightarrow M_A = -150 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

ou

$$(ah_+) \sum M_B = 0: -M_A - 70 \cdot 2 + 20 - (40 \cdot 3) \cdot 1,5 + 50 \cdot 3 = 0 \Rightarrow M_A = -150 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

*c) Polo (i) no ponto C*

A Figura 1.34a ilustra a nova posição do polo (ponto C) e a Figura 1.34b apresenta o momento  $M_A$  (incógnito), o momento externo de intensidade  $20 \text{ kN} \cdot \text{m}$  (originalmente aplicado na estrutura) e os momentos da força distribuída  $(40 \cdot 3) \text{ kN}$  e da força concentrada  $R_A = 70 \text{ kN}$  obtidos em relação ao ponto C.



**Figura 1.34** Polo (i) no ponto C: carregamento (a); momentos (b).

A distância da reação  $R_A = 70 \text{ kN}$  ao polo no ponto C é  $(2 \text{ m} + 3 \text{ m}) = 5 \text{ m}$  e da resultante  $R_V = (40 \cdot 3) \text{ kN}$  é  $1,5 \text{ m}$ , gerando, respectivamente, os momentos  $(70 \cdot 5) \text{ kN} \cdot \text{m}$  e  $((40 \cdot 3) \cdot 1,5) \text{ kN} \cdot \text{m}$  nos sentidos indicados na Figura 1.34b. A força  $50 \text{ kN}$  não gera momento, pois a distância até o polo no ponto C é nula.

Da equação de momentos em relação ao ponto B resulta

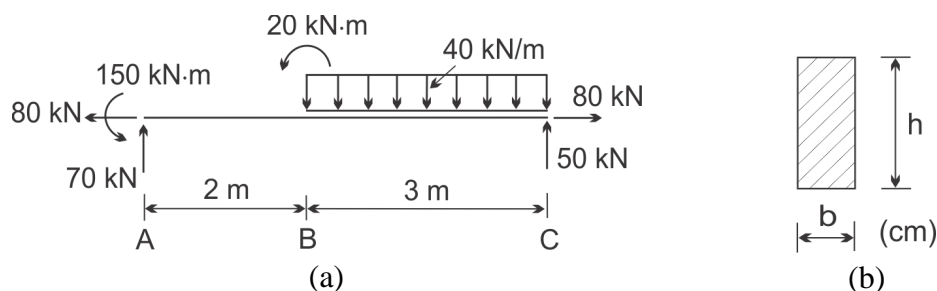
$$(h_+) \sum M_C = 0: M_A + 70 \cdot 5 - 20 - (40 \cdot 3) \cdot 1,5 = 0 \Rightarrow M_A = -150 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

ou

$$(ah_+) \sum M_C = 0: -M_A - 70 \cdot 5 + 20 + (40 \cdot 3) \cdot 1,5 = 0 \Rightarrow M_A = -150 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

A reação  $M_A = 150 \text{ kN} \cdot \text{m}$  negativa indica que o sentido de  $M_A$  é oposto ao arbitrado na Figura 1.34. Cabe destacar que a escolha da posição do polo (i) nos pontos A, B ou C não altera o valor da reação  $M_A$ , como já era esperado.

Com os valores das reações  $H_A = 80 \text{ kN}$  ( $\leftarrow$ ),  $R_A = 70 \text{ kN}$  ( $\uparrow$ ) e  $M_A = 150 \text{ kN} \cdot \text{m}$  (ah) tem-se a estrutura em equilíbrio, como ilustra a Figura 1.35a.



**Figura 1.35** Vista longitudinal da barra em equilíbrio (a); seção transversal (b).

No cálculo das reações, as equações de equilíbrio foram aplicadas considerando a barra como corpo rígido. Dependendo do material utilizado na construção da viga e das dimensões  $(b, h)$  da seção transversal, os esforços podem provocar deformações exageradas e a ruptura do material. A fim de avaliar a segurança da estrutura, além do corpo em equilíbrio é necessário definir o material e duas grandezas fundamentais da Mecânica dos sólidos deformáveis: tensão e deformação.

## 1.9 Hipóteses do material

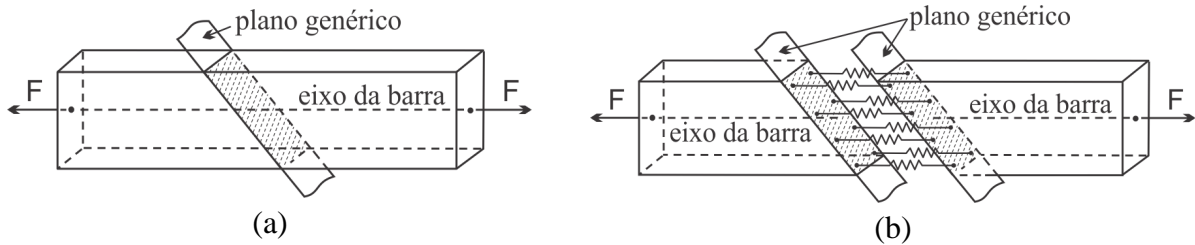
Com relação aos materiais utilizados no projeto estrutural, são admitidas as seguintes hipóteses:

- *Contínuo*: os vazios não são considerados;
- *Homogêneo*: mesmas propriedades em qualquer ponto do corpo;
- *Isotrópico*: em um ponto, as propriedades são as mesmas em todas as direções;
- *Elástico*: o corpo recupera todas as deformações ocorridas ao ser descarregado;
- *Plástico*: o corpo não recupera totalmente as deformações ocorridas ao ser descarregado.

## 1.10 Tensão e deformação

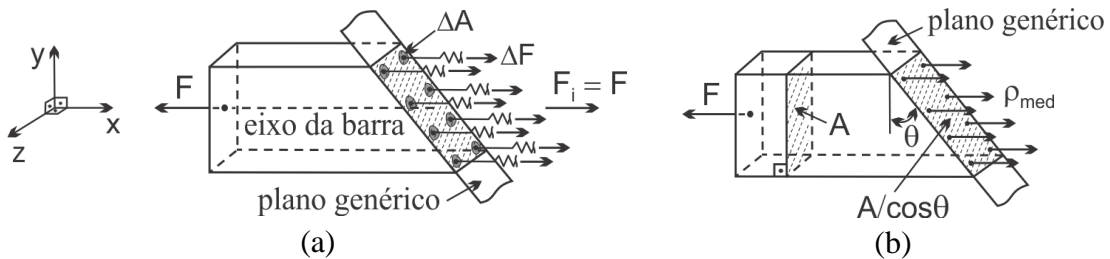
### 1.10.1 Tensão em um ponto

Considera-se apenas o efeito das forças axiais na barra em equilíbrio da Figura 1.36a, em que a força  $F$  atua na direção do eixo da barra. Um corte imaginário pelo plano genérico divide o elemento em duas partes (Figura 1.36b).



**Figura 1.36** Barra submetida à tração: plano genérico (a); partes interligadas por molas idealizadas (b).

A interação das partes separadas é representada por molas nos pontos da face inclinada (Figura 1.36b). A Figura 1.37a ilustra parte da barra à esquerda da seção do corte hipotético onde surgem as forças elementares  $\Delta F$  que cada mola absorve da força interna  $F_i$  e as áreas elementares  $\Delta A$  em torno de cada mola idealizada (Figura 1.37b).



**Figura 1.37** Parte à esquerda do plano genérico: forças internas (a); tensão total média (b).

Na Figura 1.37b, a tensão total ( $\rho$ ) em cada ponto (local) da seção é definida por meio da relação entre a força elementar interna  $\Delta F$  e a área  $\Delta A$  em que atua, como expressa a Equação 1.13.

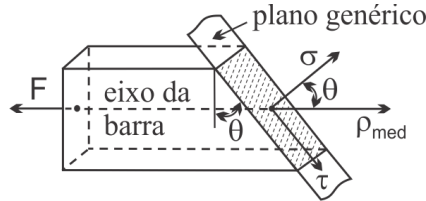
$$\rho = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} \quad (1.13)$$

Ao considerar apenas o efeito das forças axiais é possível admitir que todos os pontos da face inclinada tenham o mesmo valor da tensão total  $\rho$ , caracterizando uma distribuição uniforme

(Figura 1.37b). A tensão total média  $\rho_{med}$  (Figura 1.37) é determinada por meio da relação entre a força interna  $F_i$  ( $\sum F_x = 0: F_i - F = 0 \Rightarrow F_i = F$ ) e a área  $A/\cos\theta$  na qual atua (Equação 1.14).

$$\rho_{med} = \frac{F_i}{\frac{A}{\cos\theta}} = \frac{F}{A} \cdot \cos(\theta) \quad (1.14)$$

A tensão total  $\rho_{med}$  pode ser decomposta em suas componentes normal ( $\sigma$ ) e paralela ( $\tau$ ) ao plano genérico hipotético de corte, como ilustra a Figura 1.38.



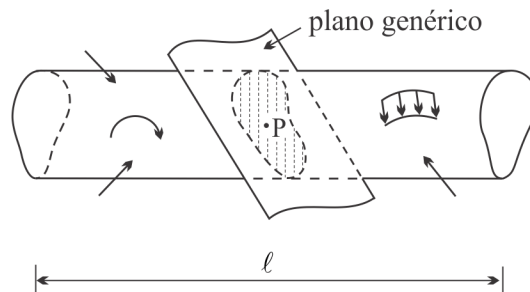
**Figura 1.38** Parte à esquerda do plano genérico: tensões na face inclinada.

Sendo a tensão média expressa por  $(F/A) \cdot \cos(\theta)$ , a projeção ortogonal de  $\rho_{med}$  na direção dos eixos perpendicular e adjacente ao plano de corte hipotético da Figura 1.38 resulta nas componentes de tensão normal (Equação 1.15) e de cisalhamento (Equação 1.16), respectivamente.

$$\sigma = \rho \cdot \cos(\theta) = \left( \frac{F}{A} \cdot \cos(\theta) \right) \cdot \cos(\theta) \Rightarrow \sigma = \frac{F}{A} \cdot \cos^2(\theta) \quad (1.15)$$

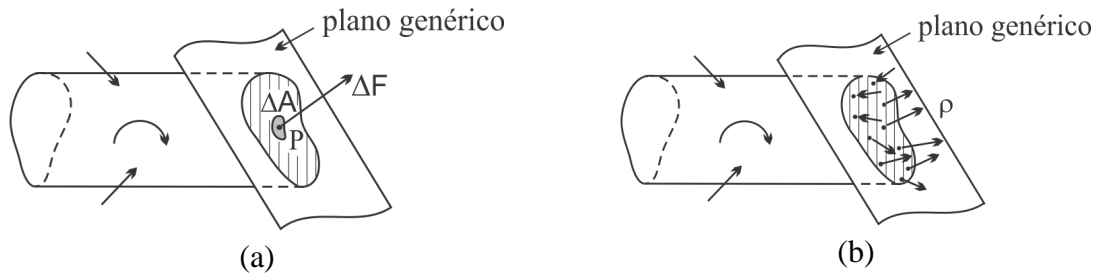
$$\tau = \rho \cdot \sin(\theta) = \left( \frac{F}{A} \cdot \cos(\theta) \right) \cdot \sin(\theta) \Rightarrow \tau = \frac{F}{A} \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\theta) \quad (1.16)$$

Considerando apenas o efeito das forças axiais na barra da Figura 1.36, é possível admitir todos os pontos da face inclinada com a mesma intensidade da tensão total  $\rho$  igual a  $\rho_{med}$ . No entanto, ao considerar os efeitos dos diferentes esforços da estrutura (Figura 1.39), é necessário admitir a tensão total  $\rho$  com uma distribuição não uniforme, ou seja, diferentes valores para diferentes pontos (P) da face inclinada.



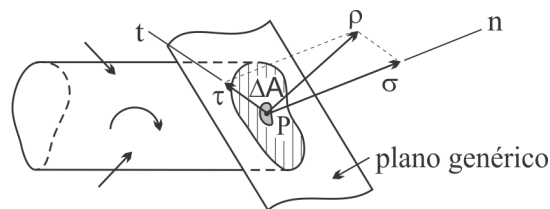
**Figura 1.39** Barra em equilíbrio: plano de corte genérico.

Um corte imaginário passando pelo plano genérico e contendo o ponto P divide a barra em duas partes, sendo que qualquer uma dessas partes pode ser utilizada para definir a tensão total do ponto P. Utiliza-se a parte à esquerda do plano genérico (Figura 1.39), em que  $\Delta F$  é a resultante das forças internas atuante na área infinitesimal  $\Delta A$ .



**Figura 1.40** Parte à esquerda do plano genérico: força interna (a); tensão total (b).

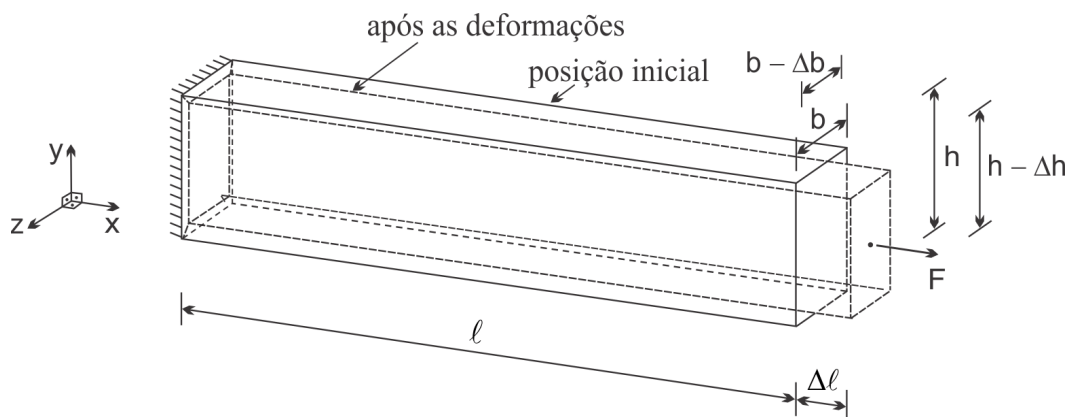
Assim como no caso da barra da Figura 1.36, a tensão total ( $\rho$ ) no ponto P da Figura 1.40a é obtida por meio da Equação 1.13. Desta forma, cada ponto P considerado na face inclinada pode ter uma intensidade, direção e sentido, como indicado na Figura 1.40b. Como discutido anteriormente, a tensão total pode ser decomposta em suas componentes na direção normal ( $n$ ) e na direção paralela ao plano genérico ( $t$ ), como ilustra a Figura 1.41.



**Figura 1.41** Parte à esquerda do plano genérico: componentes da tensão total.

### 1.10.2 Deformação

Ocorre deformação quando a distância entre dois pontos diferentes não é mais a mesma. A barra engastada da Figura 1.42 é solicitada por uma força axial  $F$  e as seções planas permanecem planas após as deformações.



**Figura 1.42** Deslocamentos da barra.

Admite-se que as deformações sejam pequenas o suficiente para que se possa considerar a posição inicial da barra (antes das deformações) aproximadamente a mesma da posição final (após as deformações). Assim, a deformação específica longitudinal (na direção do eixo  $x$ ) pode ser definida por meio da relação entre a variação do comprimento da barra e seu comprimento inicial (Equação 1.17).

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta \ell}{\ell} \quad (1.17)$$

Com base na equação 1.17, as deformações específicas transversais atuantes na direção dos eixos y ( $\varepsilon_y$ ) e z ( $\varepsilon_z$ ) são obtidas com o uso das equações 1.18 e 1.19, respectivamente.

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta h}{h} \quad (1.18)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta b}{b} \quad (1.19)$$

A razão entre a deformação específica transversal ( $\varepsilon_t$ ) e a deformação específica longitudinal ( $\varepsilon_l$ ) resulta no coeficiente de Poisson ( $\nu$ ) (Equação 1.20), que assume valor único para materiais isotrópicos (Equação 1.21).

$$\nu = \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_l} \quad (1.20)$$

$$\nu = \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x} \quad (1.21)$$

A força axial  $F$  no sentido indicado na Figura 1.42 produz alongamento da barra na direção longitudinal (eixo  $x$ ) e encurtamento nas direções transversais (eixos  $y$  e  $z$ ). Ao adotar uma convenção de sinal para a deformação,  $\varepsilon_y$  e  $\varepsilon_z$  devem ter sinais contrários ao de  $\varepsilon_x$ . Cabe destacar que o coeficiente de Poisson varia de  $\nu = 0$  (cortiça, por exemplo) a  $\nu = 0,5$  (borracha, por exemplo), sendo que para a maioria dos materiais varia entre 0,25 e 0,35.

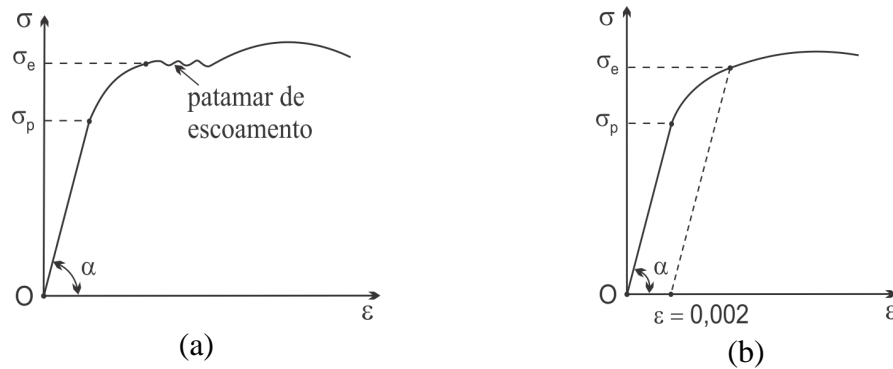
### 1.11 Diagrama tensão *versus* deformação (Lei de Hooke)

Admitindo o ângulo  $\theta$  nulo ( $\theta = 0^\circ$ ) da Figura 1.36, a área da face inclinada coincide com a área da seção transversal, resultando nas seguintes componentes da tensão total:

- Tensão normal:  $\sigma = \frac{F}{A} \cdot \underbrace{\cos^2(0)}_1 = \frac{F}{A}$ ;
- Tensão de cisalhamento:  $\tau = \frac{F}{A} \cdot \underbrace{\cos(0)}_1 \cdot \underbrace{\sin(0)}_0 = 0$ .

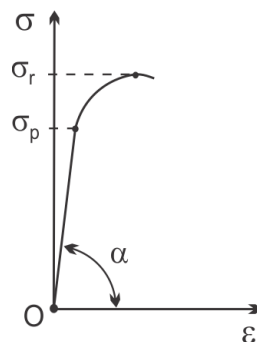
Os diagramas tensão *versus* deformação ( $\sigma \times \varepsilon$ ) são obtidos aplicando gradualmente as forças axiais  $F$  em corpos de prova fabricados com um determinado material. Para cada valor da força axial  $F$  após as deformações cessarem são determinadas a tensão normal  $\sigma$  e a deformação longitudinal  $\varepsilon$ , que definem um ponto do diagrama tensão *versus* deformação (Figura 1.43).

Os materiais podem ser classificados em dúcteis quando permitem grandes deformações antes da ruptura (Figura 1.43a) e frágeis quando se rompem com pequenas deformações (Figura 1.43b). Nos diagramas tensão *versus* deformação há um trecho linear até a tensão limite de proporcionalidade  $\sigma_p$ , caracterizado como trecho elástico-linear, apresentando uma relação linear entre tensão e deformação.



**Figura 1.43** Material dúctil: com patamar de escoamento (a); sem patamar de escoamento (b).

A tensão de escoamento  $\sigma_e$  é definida no patamar de escoamento, que é um trecho da curva  $\sigma \times \varepsilon$  no qual a barra se deforma sem que haja variação significativa da tensão normal (Figura 1.43a). Nos materiais dúcteis em que o patamar de escoamento não é bem caracterizado (Figura 1.43b), a tensão de escoamento  $\sigma_e$  é definida na interseção da curva  $\sigma \times \varepsilon$  com uma reta paralela ao trecho linear e passando por um ponto com deformação bem pequena, por convenção,  $\varepsilon = 0,002$ , ou (2/1000). Nos materiais frágeis, que se deformam pouco antes da ruptura, não existe o patamar de escoamento (Figura 1.44). A tensão de ruptura ( $\sigma_r$ ) ocorre logo após a tensão do limite de proporcionalidade ( $\sigma_e$ ).



**Figura 1.44** Material frágil.

No trecho linear da curva  $\sigma \times \varepsilon$  (figuras 1.43 e 1.44) é possível estabelecer uma relação entre a tensão normal  $\sigma$  e a deformação específica longitudinal  $\varepsilon$  por meio da lei de Hooke (Equação 1.22).

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (1.22)$$

O coeficiente de proporcionalidade  $E$ , denominado módulo de deformação longitudinal (também conhecido como módulo de elasticidade ou módulo de Young), pode ser determinado utilizando a inclinação do trecho linear definido pelo ângulo ( $\alpha$ ) (Equação 1.23).

$$E = \operatorname{tg} \alpha \quad (1.23)$$

Os diagramas tensão *versus* deformação das figuras 1.43 e 1.44 são provenientes de uma barra submetida à tração simples. Considerando uma barra curta submetida à compressão simples, ou seja, a força axial  $F$  no sentido contrário ao indicado nas figuras 1.36 e 1.42, as partículas do material tendem a ser esmagadas e o elemento estrutural sofre encurtamento na direção

longitudinal, provocando alongamentos nas direções transversais, movimentos opostos aos indicados na Figura 1.42. Os diagramas tensão *versus* deformação da barra comprimida são similares aos da barra submetida à tração simples.

Para os materiais dúcteis, caracterizados por exibirem grandes deformações antes da ruptura, os valores da tensão de ruptura na tração ( $\sigma_{t,r}$ ) e na compressão ( $\sigma_{c,r}$ ) são aproximadamente iguais à tensão de escoamento ( $\sigma_e$ ) ( $\sigma_{t,r} = \sigma_{c,r} = \sigma_e$ ). Já para os materiais frágeis, que deformam pouco antes da ruptura, os valores da tensão de ruptura na tração e na compressão são diferentes ( $\sigma_{t,r} \neq \sigma_{c,r}$ ).

### 1.12 Segurança da estrutura

Toda estrutura, ao ser projetada, tem uma finalidade a cumprir e deve sempre satisfazer certas condições relativas à segurança contra a ruptura e a deformação.

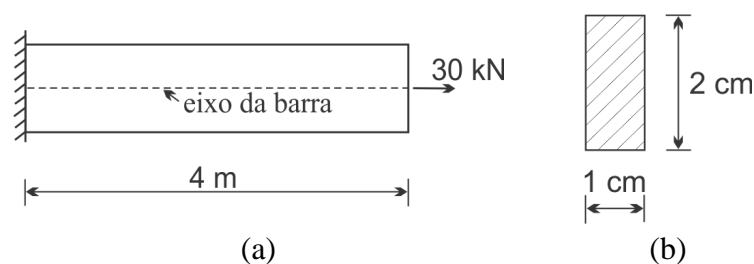
A segurança da estrutura quanto a uma eventual ruptura do material é avaliada utilizando o estado de tensão dos pontos mais desfavoráveis (mais solicitados) da estrutura e uma condição de resistência do material (critério de resistência), na qual se admitem parâmetros limites para o material, como tensões admissíveis, coesão e coeficiente de atrito interno.

O método das tensões admissíveis, no qual a tensão atuante não deve exceder a tensão admissível do material, é um dos procedimentos para se avaliar a segurança da estrutura contra a ruptura.

Ensaio em corpos de prova padronizados possibilitam determinar a tensão de ruptura do material, que dividida por um coeficiente de segurança ( $s$ ) superior à unidade resulta na tensão admissível ( $\sigma_{adm}$ ). Nos materiais dúcteis, a tensão admissível resulta  $\sigma_{t,adm} \approx \sigma_{c,adm} = \sigma_e/s$ , e nos materiais frágeis resulta valores distintos na tração ( $\sigma_{t,adm} = \sigma_{t,r}/s$ ) e na compressão ( $\sigma_{c,adm} = \sigma_{c,r}/s$ ).

A segurança contra a deformação pode ser garantida desde que os deslocamentos máximos na estrutura não excedam valores limites especificados por normas ou códigos associados aos materiais utilizados, como aço, concreto, madeira etc.

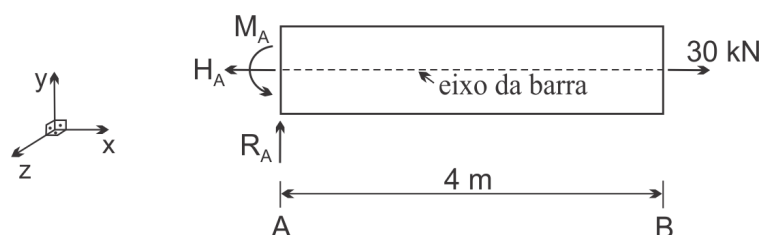
O exemplo da barra solicitada axialmente da Figura 1.45 (solicitação axial) objetiva verificar a segurança da estrutura contra a ruptura do material e contra a deformação. Para tanto foram consideradas as seguintes propriedades: tensão normal admissível  $\sigma_{adm} = 18 \text{ kN/cm}^2$ , módulo de deformação longitudinal  $E = 12.500 \text{ kN/cm}^2$  e deslocamento longitudinal limite  $u_{limite} = 6 \text{ mm}$ .



**Figura 1.45** Barra engastada e solicitada axialmente: vista longitudinal (a); seção transversal (b).

#### Classificação da estrutura

A Figura 1.46 apresenta o diagrama de corpo livre da estrutura ilustrada pela Figura 1.45.



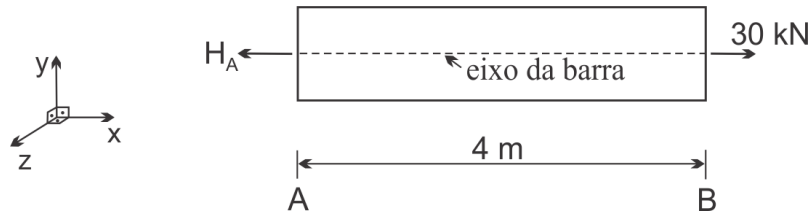


**Figura 1.46** Diagrama de corpo livre.

Na Figura 1.46 há três reações de vínculos ( $H_A$ ,  $R_A$ ,  $M_A$ ), e por se tratar de corpo rígido avaliado no plano há também três equações de equilíbrio ( $\Sigma F_x = 0$ ,  $\Sigma F_y = 0$ ,  $\Sigma M_i = 0$ ), resultando em uma estrutura isostática ou estaticamente determinada.

### Reações

Das reações do engastamento fixo ( $H_A$ ,  $R_A$ ,  $M_A$ ) é suficiente considerar a reação longitudinal  $H_A$ , uma vez que apenas o efeito das forças axiais é considerado, como ilustra a Figura 1.47.

**Figura 1.47** Esforços ativo e reativo.

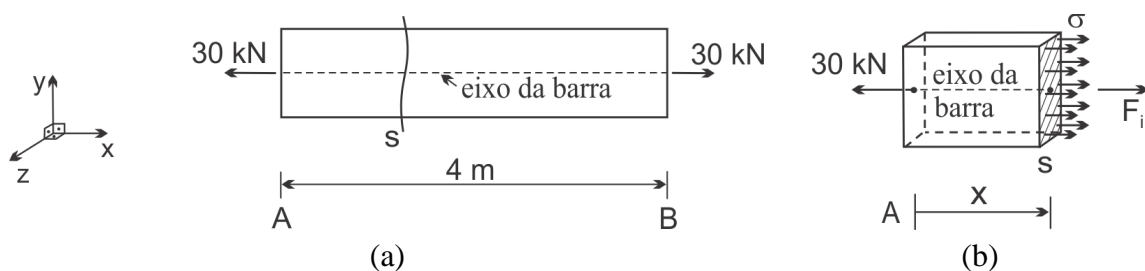
### Equação de equilíbrio

Na Figura 1.47 o equilíbrio das forças na direção do eixo x resulta no valor de  $H_A$ .

$$(\leftarrow +) \sum F_x = 0: H_A - 30 = 0 \Rightarrow H_A = 30 \text{ kN}$$

### Tensão normal ( $\sigma = F_i/A$ )

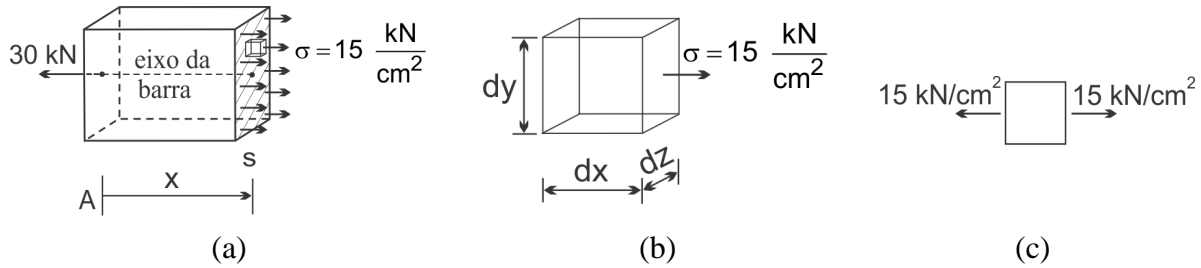
A Figura 1.48a ilustra a barra de 4 m de comprimento sujeita à ação do par de forças (ativa e reativa) de 30 kN e a Figura 1.48b apresenta a parte à esquerda da seção de corte hipotético (s), evidenciando o surgimento das componentes de tensão normal ( $\sigma$ ) e da força interna resultante  $F_i$  ( $F_i = \sigma \cdot A$ ).

**Figura 1.48** Barra solicitada pelo par de forças de 30 kN de intensidade (a); parte da barra à esquerda da seção s do corte hipotético (b).

Na Figura 1.48b o equilíbrio das forças na direção do eixo x resulta no valor da força interna  $F_i$ .

$$(\leftarrow +) \sum F_x = 0: 30 - F_i = 0 \Rightarrow F_i = 30 \text{ kN}$$

Sabendo que a área ( $A$ ) da seção transversal retangular (Figura 1.45) é  $A = 1 \cdot 2 = 2 \text{ cm}^2$ , a tensão normal média atuante em qualquer seção transversal ao longo do comprimento da barra ( $0 \leq x \leq \ell$ ) é constante e igual a  $\sigma = 30/2 = 15 \text{ kN/cm}^2$ , como ilustra a Figura 1.49.

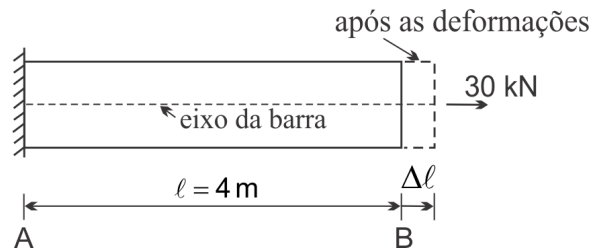


**Figura 1.49** Estado de tensão dos pontos da seção s: parte da barra à esquerda da seção de corte (a); elemento material de volume elementar solicitado axialmente (b); representação bidimensional do elemento material sujeito ao estado de tensão uniaxial (c).

Pelo método das tensões admissíveis, por ser a tensão normal máxima atuante de  $15 \text{ kN/cm}^2$  inferior à tensão admissível ( $\sigma_{\text{adm}} = 18 \text{ kN/cm}^2$ ), a segurança da estrutura contra a ruptura do material está garantida.

#### Deformação específica

A Figura 1.50 ilustra a variação do comprimento ( $\Delta\ell$ ) causado na barra pela ação da força ativa de 30 kN.



**Figura 1.50** Deslocamento longitudinal.

Sabendo que a tensão normal e a deformação específica são obtidas pelas relações  $\sigma = F_i/A$  e  $\varepsilon = \Delta\ell/\ell$ , respectivamente, a substituição desses dois resultados na Equação 1.22 ( $\sigma = E \cdot \varepsilon$ ) resulta no alongamento total ( $\Delta\ell$ ) provocado pela força axial ativa, expresso pela Equação 1.24.

$$\frac{F_i}{A} = E \cdot \frac{\Delta\ell}{\ell} \Rightarrow \Delta\ell = \frac{F_i \cdot \ell}{E \cdot A} \quad (1.24)$$

Sabendo que  $F_i = 30 \text{ kN}$ ,  $\ell = 4 \text{ m} = 400 \text{ cm}$ ,  $E = 12.500 \text{ kN/cm}^2$  e  $A = 2,0 \text{ cm}^2$ , a substituição desses valores na Equação 1.24 resulta no valor do deslocamento longitudinal máximo ( $\Delta\ell_{\text{máx}}$ ).

$$\Delta\ell = \frac{30 \cdot 400}{12500 \cdot 2,0} = 0,48 \text{ cm} \quad (1.25)$$

O deslocamento longitudinal máximo  $\Delta\ell_{\text{máx}} = 0,48 \text{ cm}$  ocorre nos pontos da seção B (livre) e se deslocam em relação aos pontos da seção A, que não se movimentam pela restrição imposta pelo vínculo em A (engastamento fixo).

Como o deslocamento máximo ( $0,48 \text{ cm}$ ) é inferior ao deslocamento limite da estrutura ( $\Delta\ell_{\text{limite}} = 0,60 \text{ cm}$ ), a segurança da estrutura contra a deformação está garantida.

Como informação adicional, a deformação específica longitudinal máxima provocada pela força de 30 kN resultou em uma deformação específica igual a  $\varepsilon = 0,48/400 = 1,2 \cdot 10^{-3}$  cm/cm.

Cabe destacar que a preocupação exagerada com a segurança pode tornar a estrutura antieconômica, mas, por outro lado, economizar em demasia compromete a segurança. Conseguir o equilíbrio entre esses dois extremos é sempre um grande desafio.

No cálculo da estrutura, dependendo do que se pretende, podem ocorrer três tipos de problemas, descritos a seguir:

#### *a) Dimensionamento*

Respeitando as condições de segurança, as dimensões dos elementos estruturais são determinadas de modo que a estrutura cumpra sua finalidade adequadamente.

#### *b) Verificação*

Com as dimensões dos elementos estruturais e os esforços atuantes já definidos, as tensões e deformações são determinadas com o propósito de verificar se não excedem os limites que garantem a segurança da estrutura.

#### *c) Avaliação*

A finalidade de uma estrutura já dimensionada e construída é alterada, exigindo determinar a carga máxima que os elementos estruturais suportam a fim de avaliar a segurança da estrutura na sua nova função.

### **1.13 Unidades**

Utiliza-se o sistema internacional de unidades (SI), com destaque para as grandezas a seguir:

- Comprimento – metro (m)  $1 \text{ m} = 10^2 \text{ cm}$
- Área – metro quadrado ( $\text{m}^2$ )  $1 \text{ m}^2 = 10^4 \text{ cm}^2$
- Volume – metro cúbico ( $\text{m}^3$ )  $1 \text{ m}^3 = 10^6 \text{ cm}^3$
- Massa – quilograma (kg)  $1 \text{ kg} = 10^3 \text{ g}$
- Força – newton (N)  $1 \text{ kN} = 10^3 \text{ N}$
- Tensão – pascal (Pa)  $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$
- Tempo – segundo (s)
- ângulo plano – radiano (rad)

Cabe recordar que 1 N equivale à força necessária para provocar na massa unitária (1 kg) uma aceleração unitária ( $1 \text{ m/s}^2$ ) na direção da força.

Pela magnitude dos valores, a tensão e o módulo de elasticidade também são apresentados com uso dos prefixos M (mega) ( $10^6$ ) e G (giga) ( $10^9$ ). Algumas relações usuais de interesse na conversão de unidades são:

- Megapascal (MPa) –  $1 \text{ MPa} = 10^6 \text{ Pa} = 0,1 \text{ kN/cm}^2 = 1 \text{ N/mm}^2 = 100 \text{ N/cm}^2$
- Gigapascal (GPa) –  $1 \text{ GPa} = 10^9 \text{ Pa} = 100 \text{ kN/cm}^2$

Cabe destacar que ao determinar uma grandeza é fundamental indicar o resultado com a unidade correspondente a fim de caracterizá-la com clareza. Por exemplo, o número 30 sem unidade é um número par, inteiro e positivo, porém esse mesmo número 30 seguido da unidade é associado a uma grandeza (30 °C – temperatura; 30° – ângulo; 30 kN – força; 30 MPa – tensão).